

Examen d'AMAE de Telecom

EUPVG FEBRER 94

- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Les notes sortiran el dia 7 de febrer.

1. Calculeu

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

on $\vec{F}(x, y, z) = (yz, -xz, z^2)$, i S és la superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ entre $z = 1$ i $z = -1$ i orientada de tal manera que en el punt $(0, \sqrt{5}/2, 1/2)$ la normal té tercera component negativa. (20 PUNTS)

Nota: S admet la parametrització

$$(x(r, \theta), y(r, \theta), z(r, \theta)) = (\sqrt{1+r^2} \cos \theta, \sqrt{1+r^2} \sin \theta, r)$$

amb $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-1 \leq r \leq 1$.

2. Donat el camp de forces a $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) =$$

$$\left(ax \cos(x^2 + y^2 + z^2), \frac{b}{2} y \cos(x^2 + y^2 + z^2), z \cos(x^2 + y^2 + z^2) \right),$$

trobeu els valors dels paràmetres reals a i b per tal que el camp sigui conservatiu. Per a aquests valors, trobeu el potencial associat a $\vec{F}$ i determineu tots els punts $P = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathbb{R}^3$ tals que el treball fet pel camp en desplaçar una partícula des de l'origen al punt P val zero. (20 PUNTS)

3. (a) Segui $p \in \mathbb{N}$ un nombre natural qualsevol, $p = 0, 1, 2, \dots$. Calculeu, en funció de p , el residu de la funció

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^p},$$

en els punts singulars que tingui. (10 PUNTS)

(b) Calculeu

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z-a)^7} dz,$$

on γ és una circumferència de centre $(0, 0)$ i radi R , recorreguda en sentit antihorari, i a és un nombre complex qualsevol, segons els valors de R , $R \neq |a|$. (10 PUNTS)

4. Segui

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-i\omega x}}{x^4 + 1} dx.$$

(a) Calculeu $I(\omega)$ si $\omega > 0$. (10 PUNTS)

(b) Demostreu que el resultat de l'apartat anterior es pot escriure com

$$\pi e^{-\omega/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{\sqrt{2}}\right). \quad (10 \text{ PUNTS})$$

5. Segui $f(x)$ l'extensió periòdica de la funció $\sin x$, amb $x \in [0, \pi]$, de període π .

(a) Dibuixeu la gràfica de $f(x)$. És una funció periòdica C^0 i C^1 a tot arreu, o C^0 a tot arreu i C^1 a troços? (2 PUNTS)

(b) Calculeu la sèrie de Fourier complexa de $f(x)$. (10 PUNTS)

(c) És $f(x)$ un senyal de banda limitada? Si fem un mostreig de $f(x)$ a l'interval $[0, \pi]$ amb 48 punts, tindrem aliasing? (3 PUNTS)

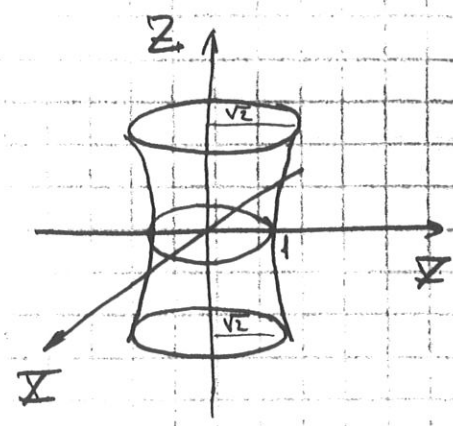
(d) Sabent que

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 - 16(1 + 24r)^2} = \frac{\pi}{192} \left(-\cotg \frac{\pi}{32} + \cotg \frac{5\pi}{96} \right),$$

calculeu X_2 de la DFT de $f(x)$ a l'interval $[0, \pi]$ amb $N = 48$ punts. (5 PUNTS)

1

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= 1 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{1+r^2} \cos \theta \\ y &= \sqrt{1+r^2} \sin \theta \\ z &= r \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \theta &\in [0, 2\pi] \\ r &\in [-1, 1] \end{aligned}$$

$$\vec{T}_r = \left(\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \cos \theta, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \sin \theta, 1 \right)$$

$$\vec{T}_\theta = \left(-\sqrt{1+r^2} \sin \theta, \sqrt{1+r^2} \cos \theta, 0 \right)$$

$$\vec{T}_r \times \vec{T}_\theta = \left(-\sqrt{1+r^2} \cos \theta, -\sqrt{1+r^2} \sin \theta, r \right)$$

El punt $(x, y, z) = \left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ correspon
a $r = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Així doncs en aquest

punt $\vec{T}_r \times \vec{T}_\theta = \left(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right)$

Com que la tercera component de la normal en aquest punt ha de ser negativa, serà

$$\vec{n} = \vec{T}_\theta \times \vec{T}_r = \left(\sqrt{1+r^2} \cos \theta, \sqrt{1+r^2} \sin \theta, -r \right)$$

Una vegada establerta l'orientació, podem calcular la integral, bé directament, bé emprant el teorema

de Stokes.

(a) Directament

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= (0 - (-x), y - 0, -z - z) \\ &= (x, y, -2z)\end{aligned}$$

i, substituint la parametrització,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(r, \theta) = (\sqrt{1+r^2} \cos \theta, \sqrt{1+r^2} \sin \theta, -2r)$$

Lavors

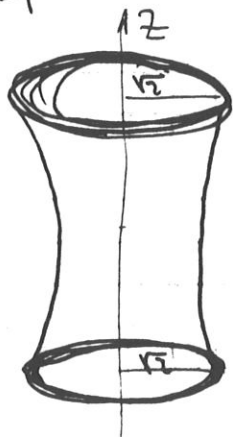
$$\begin{aligned}\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{-1}^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta (\vec{\nabla} \times \vec{F})(r, \theta) \cdot \vec{n}(r, \theta) \\ &= \int_{-1}^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \left[(1+r^2) \cos^2 \theta + (1+r^2) \sin^2 \theta + 2r^2 \right] \\ &\quad \text{cos}^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ &\quad (1+r^2) \cdot (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) + 2r^2 = 1+r^2+2r^2 \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dr (1+3r^2) = 2\pi \int_{-1}^1 dr (1+3r^2) \\ &= 2\pi (r+r^3) \Big|_{-1}^1 = 8\pi\end{aligned}$$

(b) Empunt el teorema de Stokes

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En aquest cas, la vora de S està constituïda per les dues circumferències de centre $(0, 0, 1)$ i $(0, 0, -1)$, respectivament, i radi $\sqrt{2}$

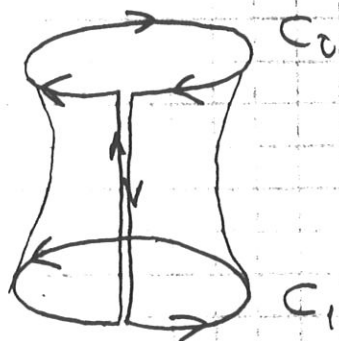
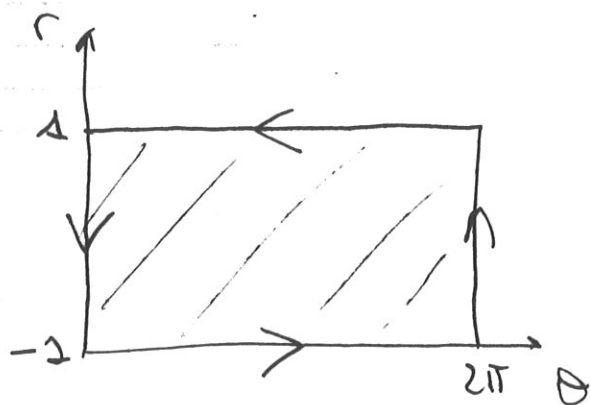
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 + z^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Per veure quina orientació proporciona $\vec{n} = \vec{T}_\theta \times \vec{T}_r$, prenem θ a l'eix de la "x" i r a l'eix de la "y" i recorrem la vora de l'espai de paràmetres en sentit antihorari



Parametritzant C_1 i C_2 amb l'angle $\theta \in [0, 2\pi]$, tindrem

POLARS:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = h \text{ (altura)}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$F = (4z, -yz, z^2)$$

-4-

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\sqrt{2} \sin \theta (-1), -\sqrt{2} \cos \theta (-1), (-1)^2 \right) \cdot \left(-\sqrt{2} \sin \theta, \sqrt{2} \cos \theta, 0 \right)$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi$$

$$\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int_0^{2\pi} d\theta \left(\sqrt{2} \sin \theta (1), -\sqrt{2} \cos \theta (1), (1)^2 \right) \cdot \left(-\sqrt{2} \sin \theta, \sqrt{2} \cos \theta, 0 \right)$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi$$

de manera que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} =$$

$$= 4\pi + 4\pi = 8\pi$$

② Com que el camp és C^1 a tot arreu, n'hi ha prou a imposar $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ per assegurar que $\vec{F}$ sigui conservatiu. Tenim

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(-2zy \sin(x^2+y^2+z^2) - (-byz \sin(x^2+y^2+z^2)), \right.$$

$$-2axz \sin(x^2+y^2+z^2) - (2zx \sin(x^2+y^2+z^2)),$$

$$\left. -xby \sin(x^2+y^2+z^2) - (-2axy \sin(x^2+y^2+z^2)) \right)$$

Així imposa

$$\left. \begin{aligned} -2 + b &= 0 \\ -a + 1 &= 0 \\ -b + 2a &= 0 \end{aligned} \right\}$$

amb solució única

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2 \end{aligned}}$$

El camp conservatiu és, per tant,

$$\vec{F}(x, y, z) = (x \cos(x^2 + y^2 + z^2), y \cos(x^2 + y^2 + z^2), z \cos(x^2 + y^2 + z^2))$$

Ara hem de buscar $f(x, y, z)$ tal que

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z)$$

Serà

$$x \cos(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \quad \leadsto \int x \cos(x^2 + y^2 + z^2) dx = f(x, y, z)$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi(y, z)$$

$$y \cos(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) =$$

$$= y \cos(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = 0 \Rightarrow \varphi(y, z) = \psi(z)$$

$$z \hookrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) =$$

$$= z \hookrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) + \psi'(z)$$

$$\Rightarrow \psi'(z) = 0 \Rightarrow \psi(z) = C$$

Per tant

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2 + z^2) + C$$

Amb això podem calcular qualsevol treball

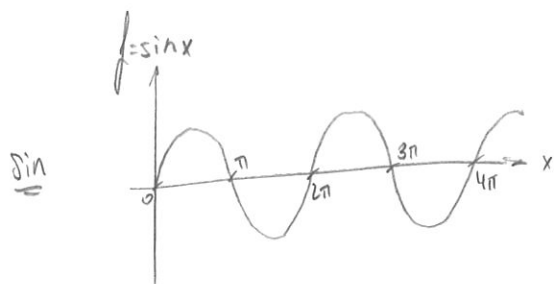
$$\int_{(0,0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_0, y_0, z_0) - f(0, 0, 0)$$

$$= \frac{1}{2} \sin(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - 0$$

Així és zero si

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

que són esferes de centre $(0, 0, 0)$ i radi $\sqrt{k\pi}$.



3) (a) $f(z) = \frac{\sin z}{z^p} \quad p = 0, 1, 2, \dots$

L'únic punt singular és $z=0$, quan $p \geq 2$.

Podem incloure el cas $p=0, 1$ sense distingir si entenem que en un punt no singular el residu és zero.

Podem calcular el residu de dues maneres

1) $z=0$ és un pol d'ordre $p-1$ per a $p=2, 3, \dots$. Calcularem el residu, però, suposant que és un pol d'ordre p , ja que així simplifica el càlcul i proporciona el resultat correcte:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{\sin z}{z^p}, z=0 \right) &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} z^p \frac{\sin z}{z^p} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (\sin z) \end{aligned}$$

Però

$$\frac{d^k}{dz^k} \sin z = \sin \left(z + k \frac{\pi}{2} \right)$$

Per tant

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{\sin z}{z^p}, z=0 \right) &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \sin \left(z + (p-1) \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \sin \left((p-1) \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p = 2m+1 \text{ senar, } m=1, 2, \dots \\ \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!} & \text{si } p = 2m \text{ par, } m=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

2) Podem fer-ho també desenvolupant $\sin z$ per Taylor al voltant de $z=0$ i identificant el coeficient de $\frac{1}{z}$ a la sèrie de Laurent resultant.

Sabem que

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Per tant

$$\frac{\sin z}{z^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1-p}$$

LAURENT:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} C_m (z-z_0)^m$$

$$m=1 \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} C_{-1} z^{-1}$$

Hem de buscar $n=0, 1, 2, \dots$ tal que $2n+1-p = -1$
Així doncs

$$2n = p-2$$

Si p és senar, $p = 2m+1$, $m = 1, 2, \dots$, no existeix cap natural n que verifiqui això, el que indica que el residu és zero en aquest cas. Si p és par, $p = 2m$, $m = 1, 2, \dots$, tenim

$$2n = 2m-2$$

$$n = m-1$$

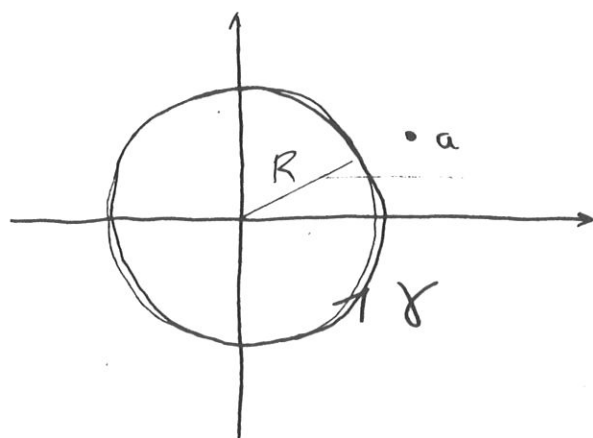
i així el residu és

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1)+1)!} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}$$

Resumint, amb els dos mètodes obtenim

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^p}, z=0\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p=0, 1 \text{ o } p=2m+1, \\ & m=1, 2, \dots \\ \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!} & \text{si } p=2m, m=1, 2, \dots \end{cases}$$

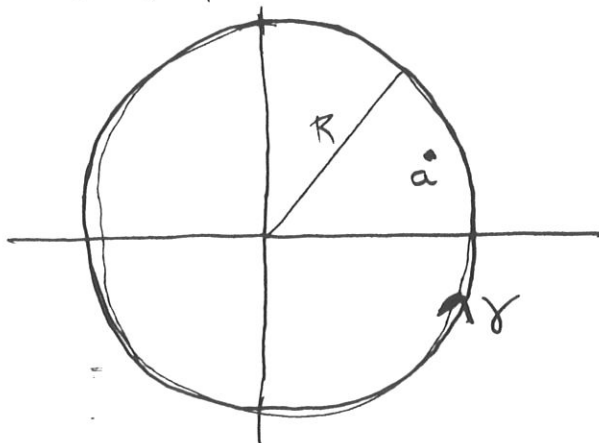
(b) Si $R < |a|$ temin



i për kont

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{zz}}{(z-a)^7} dz = 0$$

Si $R > |a|$ temin



i për kont

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{zz}}{(z-a)^7} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{zz}}{(z-a)^7}, z=a \right) =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(7-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{7-1}}{dz^{7-1}} (z-a)^7 \frac{e^{zz}}{(z-a)^7}$$

$$= \frac{2\pi i}{6!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^6}{dz^6} e^{zz} = \frac{2\pi i}{6!} z^6 e^{2a}$$

$$= \pi i \frac{2^7}{6!} e^{2a}$$

$$(4) \quad I(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-iwx}}{x^4 + 1} dx$$

$$\text{Si } w > 0$$

$$I(w) = -2\pi i \sum_{\text{simple}}^{\text{interior}} \operatorname{Res} \left(\frac{z^2 e^{-i\omega z}}{z^4 + 1} \right)$$

$$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = z_k = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}k}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

Es pòls, d'ordre 1, en el semiplà inferior. Per

$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^2 e^{-i\omega z}}{z^4 + 1}, z = z_k \right) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{z^2 e^{-i\omega z}}{z^4 + 1}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z^2 e^{-i\omega z} + (z - z_k)(z^2 e^{-i\omega z})'}{4z^3} =$$

↑
Hôpital

$$= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z^2 e^{-i\omega z}}{4z^3} = \frac{1}{4} \frac{e^{-i\omega z_k}}{z_k}$$

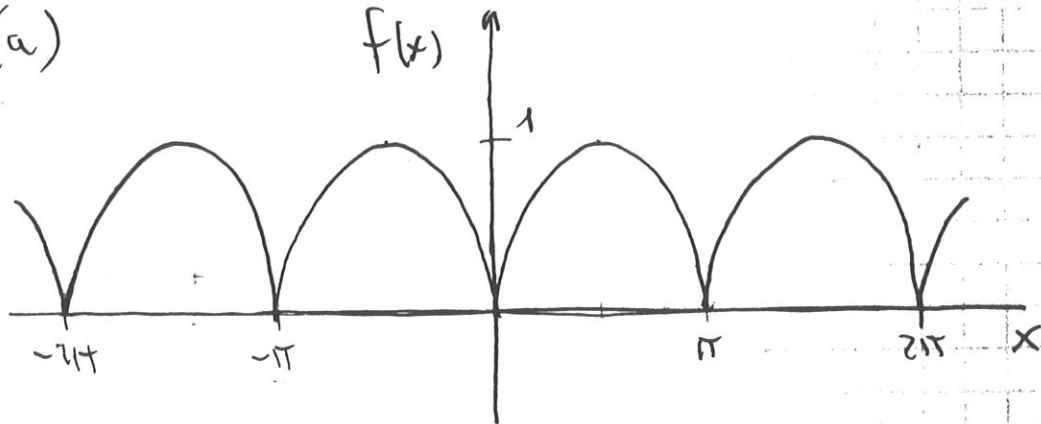
Per tant

$$I(w) = -2\pi i \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-i\omega z_2}}{z_2} + \frac{e^{-i\omega z_3}}{z_3} \right]$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left[\underset{z_2}{e^{-i\frac{5\pi}{4}}} \underset{z_2^{-1}}{e^{-i\omega e^{i\frac{5\pi}{4}}}} + \underset{z_3}{e^{-i\frac{7\pi}{4}}} \underset{z_3^{-1}}{e^{-i\omega e^{i\frac{7\pi}{4}}}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\pi i}{2} \left[e^{i \frac{3\pi}{4}} e^{-i\omega \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)} + e^{i \frac{\pi}{4}} e^{-i\omega \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)} \right] \\
&= -\frac{\pi i}{2} e^{i \frac{\pi}{2}} \left[e^{i \frac{\pi}{4}} e^{-i\omega \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} + e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{-i\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} \right] \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-\omega/\sqrt{2}} \left[e^{i \frac{\pi}{4}} e^{-i\omega/\sqrt{2}} + e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{-i\omega/\sqrt{2}} \right] \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-\omega/\sqrt{2}} \left[e^{i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{\sqrt{2}} \right)} + e^{-i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{\sqrt{2}} \right)} \right] \\
&= \pi e^{-\omega/\sqrt{2}} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned}$$

5 (a)



Es una función C^0 a tot arreu, però C^1 a trosos, ja que la 1ª derivada és discontinua per a $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
(b) \quad C_n &= \frac{1}{\pi} \int_c^{c+\pi} f(x) e^{-i \frac{2\pi n x}{\pi}} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x e^{-i 2n x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-i2nx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^\pi e^{i(1-2n)x} dx - \int_0^\pi e^{-i(1+2n)x} dx \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{i(1-2n)} (e^{i(1-2n)\pi} - 1) - \frac{1}{-i(1+2n)} (e^{-i(1+2n)\pi} - 1) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-2n} (-1-1) + \frac{1}{1+2n} (-1-1) \right] \\
&\quad \left(\text{ja que } e^{i(1-2n)\pi} = e^{-i(1+2n)\pi} = -1 \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}
\end{aligned}$$

Per tant

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-4n^2} e^{i2nx}$$

(c) La sèrie de Fourier de $f(x)$ té $C_n \neq 0$ per a $|n|$ tant gran com vulguem. Per tant no s'ha de banda limitada i sempre hi haurà aliasing (encara que el seu efecte disminuirà ràpidament quan N es faci gran).

(d)

$$\bar{X}_2 = 48 \sum_{r \in \mathbb{Z}} C_{2+r \cdot 48}$$

$$= 48 \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - 4(2 + r \cdot 48)^2}$$

$$= \frac{96}{\pi} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 - 16(1 + r \cdot 24)^2}$$

$$= \frac{96}{\pi} \frac{\pi}{192} \left(-\cot \frac{\pi}{32} + \cot \frac{5\pi}{96} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\cot \frac{\pi}{32} + \cot \frac{5\pi}{96} \right)$$

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Juny 94

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Les notes sortiran el dia 4 de juliol (dilluns) i les revisions seran el dia 8 de juliol (divendres).
- Primer parcial: problemes 1, 2, 3, 4; segon parcial: problemes 5, 6, 7, 8; examen final: problemes 3, 4, 5, 6.

1. Sigui S la superfície formada pel cilindre $x^2 + y^2 = 1$ entre $z = 0$ i $z = 1$ i la tapadora superior $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$. Calculeu

$$\int_S (x^2 y, -xy^2, z) \cdot d\vec{\sigma} \quad (30 \text{ p.})$$

2. (a) Calculeu

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z - a_1} + \dots + \frac{1}{z - a_n} \right) dz,$$

on γ és una circumferència de centre l'origen i radi $R > 0$, recorre-guda en sentit antihorari, i $a_1, \dots, a_n$ són n nombres complexos, tots de mòdul més petit que R . (10 p.)

- (b) Sigui C el rectangle, orientat en sentit antihorari, amb costats $x = \pm 2$, $y = 0$, $y = 1$, i sigui la funció

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)^2 + 3}.$$

Dibuixeu, al pla complex, el contorn C i les singularitats de $f(z)$, i calculeu la integral de f sobre C . (15 p.)

3. Sigui C la corba intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = 1$ amb el pla $3x + y + z = 5$ orientada de tal manera que la seva projecció en el pla XY és recorreguda en sentit antihorari.

- (a) Demostreu, fent un dibuix si cal, que una possible parametrització del tros de pla que queda dins el cilindre és

$$x(r, \phi) = r \cos \phi,$$

$$y(r, \phi) = r \sin \phi,$$

$$z(r, \phi) = 5 - 3r \cos \phi - r \sin \phi,$$

amb $r \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. (5 p.)

- (b) Calculeu

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

emprant el teorema de Stokes. (20 p.)

4. Sigui $s(t)$ l'extensió periòdica, amb període 1, de $\cos^2(2\pi t)$ a l'interval $[0, 1]$.

- (a) Trobeu la sèrie complexa de Fourier de $s(t)$, i demostreu que aquest senyal és de banda limitada. Indicació: noteu que $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$. (5 p.)

- (b) Quin nombre mínim de punts ha de contenir el mostreig de $s(t)$ a l'interval $[0, 1]$ si no volem tenir *aliasing*? (5 p.)

- (c) Trobeu la DFT del senyal $s(t)$ amb un mostreig de 10 punts a l'interval $[0, 1]$. (10 p.)

5. Siguen X , Y variables aleatòries contínues amb funció de densitat conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

i sigui Z una variable aleatòria normal amb esperança zero i variància $\sigma^2 = 17/324$, independent de X i Y .

- (a) Calculeu $E(XY)$, $E((XY)^2)$, i també $E(X)$ i $E(Y)$, sense calcular les marginals. Són independents X i Y ? (10 p.)

- (b) Calculeu $P(Z > -0.1)$ (10 p.)

- (c) Sigui el procés

$$W_t = (XY - 4/9) \sin t + Z \cos t.$$

Calculeu la seva esperança i la seva autocorrelació, i digueu si és estacionari (10 p.)

6. Sigui un sistema lineal invariant en el temps amb resposta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } \pi \leq t \leq 3\pi, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Siguen X i Y variables aleatòries uniformes $U[-\pi, \pi]$ independents i sigui el procés

$$Z_t = \cos(t + X) \cos(t + Y).$$

- (a) Demostreu que la funció de transferència del sistema verifica

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\sin^2(\pi\omega)}{\omega^2} \quad (5 \text{ p.})$$

- (b) Demostreu que $E(Z_t) = 0$ i que

$$E(Z_{t+\tau} Z_t) = \frac{\cos^2 \tau}{4} \quad (10 \text{ p.})$$

- (c) Demostreu que

$$G_Z(\omega) = \frac{\pi}{8} (\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2) + 2\delta(\omega)) \quad (5 \text{ p.})$$

- (d) Calculeu la potència promig total del procés que s'obté quan Z_t passa pel sistema lineal. (5 p.)

7. (a) Sigui l'experiment aleatori consistent en tirar dos daus de sis cares. Diguen quin és l'espai mostral i demostreu que la probabilitat d'obtenir la mateixa puntuació en els dos daus és $1/6$. (5 p.)

- (b) Repetim l'experiment 50 vegades. Calculeu la probabilitat d'obtenir exactament dues vegades la mateixa puntuació en els dos daus. (5 p.)

- (c) Repetint de nou l'experiment 50 vegades, calculeu la probabilitat d'obtenir més de 10 cops la mateixa puntuació en els dos. (10 p.)

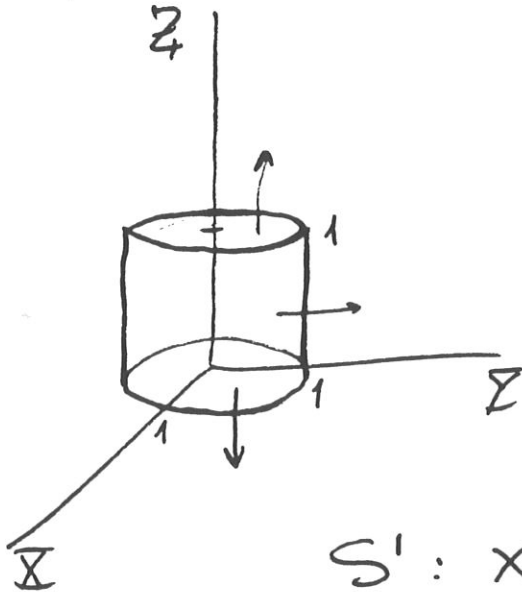
8. Sigui un sistema discret amb entrada x_n i sortida y_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, relacionades per (es suposa $y_i = 0$ si $i < 0$)

$$8y_n - 6y_{n-1} + y_{n-2} = x_n.$$

- (a) Trobeu la funció de transferència discreta del sistema, $H(z)$, i els seus pols. (5 p.)

- (b) Calculeu la resposta impulsiva discreta del sistema, h_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, és a dir, l'antitransformada z de $H(z)$, i estudeu el seu límit quan $k \rightarrow \infty$. Es això coherent amb la situació dels pols de $H(z)$? (20 p.)

①



$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, -xy^2, z)$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & 0 \leq z \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1, & z = 1 \end{cases}$$

$$S': x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$$

$S \cup S'$ es una superficie cerrada

$$\Rightarrow \oint_{S+S'} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V dx dy dz \nabla \cdot \vec{F}$$

on $V: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

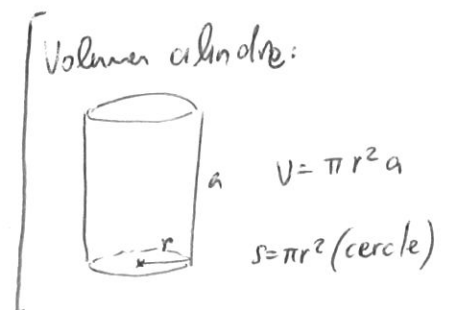
$$\nabla \cdot \vec{F} = 2xy - 2xy + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} &= - \int_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_V dx dy dz \cdot 1 \\ &= - \int_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \text{vol}(V) = \\ &= - \int_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi - \int_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

A CILINDRICAL:
 $x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$
 $z = z$ $J = r$
 $z \in [0, 1]$ $r \in [0, 1]$ $\theta \in [0, 2\pi]$

la parametrizaci3n de S' es la parte inferior.

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r &\in [0, 1] \\ \varphi &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



$$\vec{T}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\vec{T}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$$

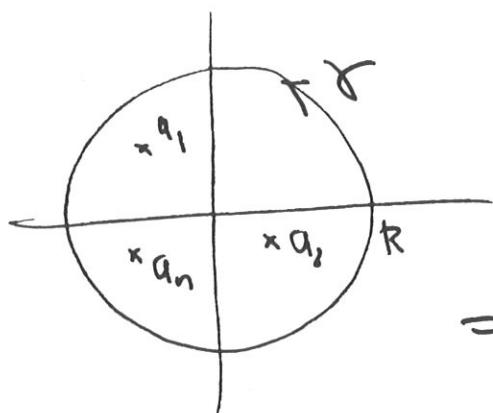
i la normal cap avall $\Rightarrow$

$$\vec{n} = \vec{T}_\varphi \times \vec{T}_r = (0, 0, -r)$$

Per tant

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \pi - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \, F_z(r, \varphi) (-r) \\ &= \pi + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \, 0 \cdot r = \pi \end{aligned}$$

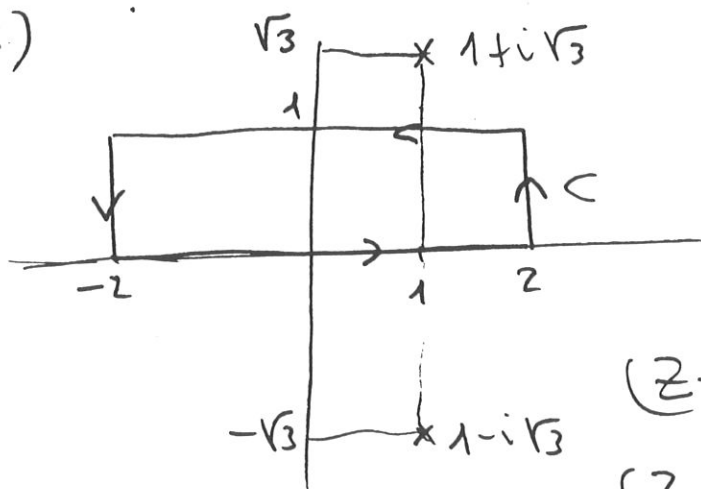
② (a)



$$\begin{aligned} &\oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z-a_1} + \dots + \frac{1}{z-a_n} \right) dz \\ &= \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma} \frac{1}{z-a_k} dz = \\ &= \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z-a_k}, z=a_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n 2\pi i \cdot 1 = 2\pi n i \end{aligned}$$

$\uparrow$
 n vegades $\rightarrow 2\pi i + \dots + 2\pi i$

(b)



$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 + 3}$$

$$(z-1)^2 + 3 = 0$$

$$(z-1)^2 = -3$$

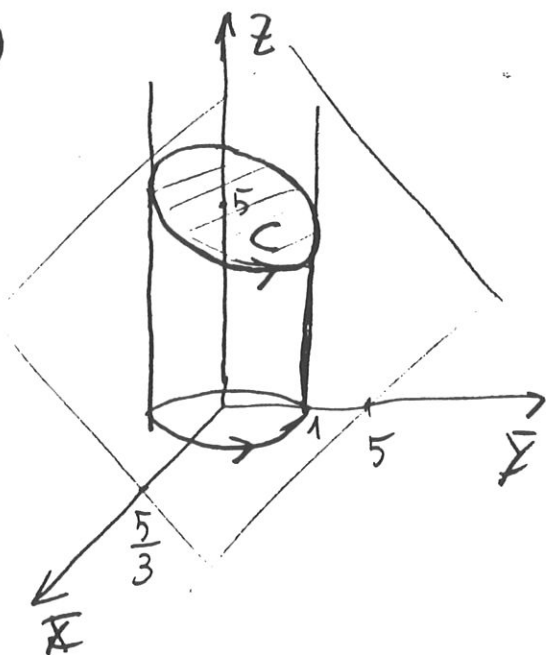
$$z-1 = \pm i\sqrt{3}$$

$$z = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Per tant $f(z)$ > harmonia dins C :

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2 + 3} = 0$$

(3)



(a) Si parametitzem S , el tros de pla dins el cilindre, amb les coordenades polars de la seva projecció en el pla XY serà

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi$$

$$y(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

$$z(r, \varphi) = 5 - 3x(r, \varphi) - y(r, \varphi) \\ = 5 - 3r \cos \varphi - r \sin \varphi$$

amb $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

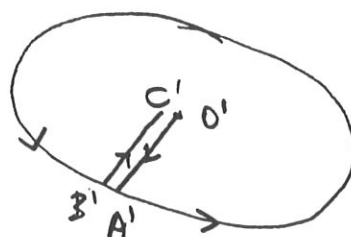
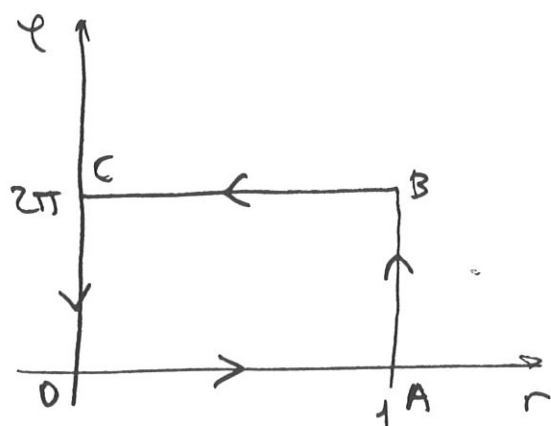
$$3x + y + z = 5$$

(b) Com que la vora de S és C , emprant el teorema de Stokes tindrem

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

(podríem triar qualsevol altra S' que tingues C per vora, però aquesta és la més senzilla)

Per calcular l'orientació de S que correspon a l'orientació de C donada, fem una certa elecció d'orientació a l'espai de paràmetres i recorrem la vora en sentit antihorari:



Així doncs l'orientació de C que volem i per tant

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{T}_r \times \vec{T}_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi, -3 \cos \varphi - \sin \varphi) \\ &\quad \times (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 3r \sin \varphi - r \cos \varphi) \\ &= (3r, r, r) \end{aligned}$$

A més, amb $\vec{F}(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= (0 - 0, 0 - 0, 3x^2 - (-3y^2)) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, 3(x^2 + y^2)) = (0, 0, 3r^2)$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})}_{r \cdot 3r^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \ 3r^3 = 2\pi \ 3 \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^1 = \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

④ (a) $T = 1$

$$\begin{aligned} \cos^2 2\pi t &= \frac{1}{2} (1 + \cos 4\pi t) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (e^{i 4\pi t} + e^{-i 4\pi t}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(e^{i \frac{2\pi 2t}{1}} + e^{-i \frac{2\pi 2t}{1}} \right) \end{aligned}$$

Per tant, els únics coeficients no nuls són

$$C_0 = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = C_{-2} = \frac{1}{4}$$

El senyal és de banda limitada amb freqüència crítica

$$f_c = \frac{2}{1} = 2$$

(b) Si fem el mostreig amb N punts (N parell)
serà

$$\Delta = \frac{1}{N}$$

i la freqüència de Nyquist del mostreig serà

$$\frac{1}{2\Delta} = \frac{N}{2}$$

Si volem

$$\frac{N}{2} > f_c = 2$$

haurà de ser $N > 4$, és a dir, $N = 6$.

(c) Si $N = 10$ sob cal calcular $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5$. Tindrem

$$\bar{x}_0 = 10 \sum_r C_{0+10 \cdot r} \stackrel{r=0}{=} 10 \sum_r C_{10 \cdot r} = 10 C_0 = 5$$

$$\bar{x}_1 = 10 \sum_r C_{1+10 \cdot r} = 0$$

$$\bar{x}_2 = 10 \sum_r C_{2+10 \cdot r} = 10 C_2 = \frac{5}{2}$$

$$\bar{x}_3 = 10 \sum_r C_{3+10 \cdot r} = 0$$

$$\bar{x}_4 = 10 \sum_r C_{4+10 \cdot r} = 0$$

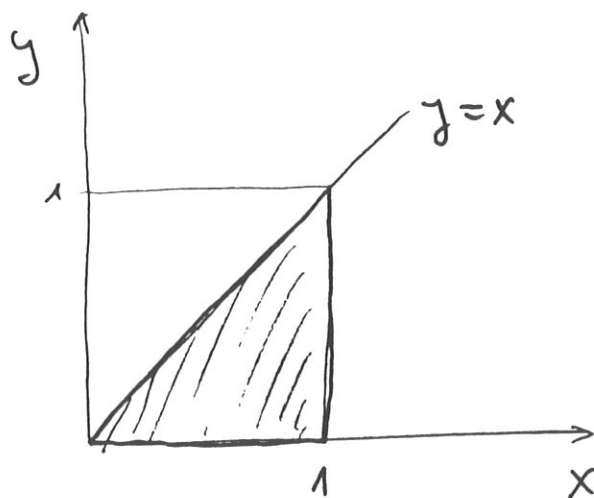
$$\bar{x}_5 = 10 \sum_r C_{5+10 \cdot r} = 0$$

i llavors $\bar{x}_6 = \bar{x}_4 = 0$, $\bar{x}_7 = \bar{x}_3 = 0$,

$$\bar{x}_8 = \bar{x}_2 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_9 = \bar{x}_1 = 0.$$

$\frac{N}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 5 + 1 = 6$ només cal fins a $\bar{x}_5$, $C_n \in \mathbb{R}$
 $0 \leq n \leq 5$

5



La normalització és correcta:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f_{XY}(x,y) &= \int_0^1 dx \int_0^x dy 8xy = \\ &= 8 \int_0^1 dx x \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^x = 4 \int_0^1 dx x^2 = \left. x^3 \right|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a) \quad E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy xy f_{XY}(x,y) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy xy 8xy = 8 \int_0^1 dx x^2 \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^x = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 dx x^5 = \frac{8}{3} \left. \frac{x^6}{6} \right|_0^1 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy x^2 y^2 f_{XY}(x,y) = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy x^2 y^2 8xy = 8 \int_0^1 dx x^3 \left. \frac{y^4}{4} \right|_0^x = \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^1 dx x^7 = 2 \left. \frac{x^8}{8} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy x f_{X,Y}(x,y) = \int_0^1 dx \int_0^x dy x \cdot 8xy \\ &= 8 \int_0^1 dx x^2 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^x = 4 \int_0^1 dx x^4 = 4 \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy y f_{X,Y}(x,y) = \int_0^1 dx \int_0^x dy y \cdot 8xy \\ &= 8 \int_0^1 dx x \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^x = \frac{8}{3} \int_0^1 dx x^4 = \frac{8}{3} \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Com que $E(XY) \neq E(X)E(Y)$, as variáveis X, Y não podem ser independentes.

$$(b) Z = N(0, \sqrt{17/324})$$

$$\tilde{Z} = \frac{Z - 0}{\sqrt{17/324}} = N(0, 1)$$

$$P(Z > -0.1) = P\left(\tilde{Z} > \frac{-0.1}{\sqrt{17/324}}\right) =$$

$$= P(\tilde{Z} > -0.4366) = 1 - P(\tilde{Z} < -0.4366)$$

$$= 1 - F_{N(0,1)}(-0.4366) =$$

$$= 1 - (1 - F_{N(0,1)}(0.4366))$$

$$= F_{N(0,1)}(0.4366) \approx 0.6667$$

$$F_{N(0,1)}(0.43) = 0.6664$$

$$(c) \quad W_t = \left(\bar{X}\bar{Z} - \frac{y}{q} \right) \sin t + Z_1 \cos t$$

$$E(W_t) = \sin t E\left(\bar{X}\bar{Z} - \frac{y}{q}\right) + \cos t E(Z_1)$$

$$= \sin t \left(E(\bar{X}\bar{Z}) - \frac{y}{q} \right) + \cos t \cdot 0$$

$$= \sin t \left(\frac{y}{q} - \frac{y}{q} \right) = 0$$

$$R_w(t+\tau, t) = E(W_{t+\tau} W_t) =$$

$$= E \left\{ \left(\left(\bar{X}\bar{Z} - \frac{y}{q} \right) \sin(t+\tau) + Z_1 \cos(t+\tau) \right) \cdot \left(\left(\bar{X}\bar{Z} - \frac{y}{q} \right) \sin t + Z_1 \cos t \right) \right\}$$

$$= \sin t \sin(t+\tau) E\left(\left(\bar{X}\bar{Z} - \frac{y}{q}\right)^2\right) +$$

$$+ (\sin(t+\tau) \cos t + \sin t \cos(t+\tau)) E\left(\left(\bar{X}\bar{Z} - \frac{y}{q}\right) Z_1\right)$$

$$+ \cos t \cos(t+\tau) E(Z_1^2)$$

Però

$$\begin{aligned}
 E\left(\left(XY - \frac{4}{9}\right)Z\right) & \stackrel{\text{Z independent of } X, Y}{=} E\left(XY - \frac{4}{9}\right)E(Z) \\
 & = E\left(XY - \frac{4}{9}\right) \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(Z^2) & = \sigma^2(Z) + (E(Z))^2 \\
 & = \frac{17}{324} + 0 = \frac{17}{324}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E\left(\left(XY - \frac{4}{9}\right)^2\right) & = E\left(\left(XY\right)^2 - \frac{8}{9}XY + \frac{16}{81}\right) \\
 & = E\left(\left(XY\right)^2\right) - \frac{8}{9}E(XY) + \frac{16}{81} = \\
 & = \frac{1}{4} - \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{16}{81} = \frac{1}{4} - \frac{16}{81} \\
 & = \frac{17}{324}
 \end{aligned}$$

Lavors

$$\begin{aligned}
 R_W(t+\tau, t) & = \frac{17}{324} \left\{ \sin(t+\tau) \sin t + \cos(t+\tau) \cos t \right\} \\
 & = \frac{17}{324} \cos(t+\tau - t) = \frac{17}{324} \cos \tau
 \end{aligned}$$

Com que $E(W_t) = \text{constant}$ i $R_W(t+\tau, t) \equiv R_W(\tau)$ sub depen de τ , el procés és estacionari.

⑥

$$(a) \quad h(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } \pi \leq t \leq 3\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\pi}^{3\pi} \frac{1}{2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{\pi}^{3\pi} = \frac{-1}{2i\omega} (e^{-i3\pi\omega} - e^{-i\pi\omega}) \\ &= \frac{-1}{2i\omega} e^{-2\pi i\omega} (e^{-i\pi\omega} - e^{i\pi\omega}) \\ &= e^{-2\pi i\omega} \frac{\sin \pi\omega}{\omega} \end{aligned}$$

$\sin \pi\omega = \frac{e^{+i\pi\omega} - e^{-i\pi\omega}}{2i}$

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= \left(e^{2\pi i\omega} \frac{\sin \pi\omega}{\omega} \right) \left(e^{-2\pi i\omega} \frac{\sin \pi\omega}{\omega} \right) \\ &= \frac{\sin^2 \pi\omega}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$(b) \quad X = U[-\pi, \pi], \quad Y = U[-\pi, \pi],$$

X, Y independent, $Z_t = \cos(t+X) \cos(t+Y)$

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E(\cos(t+X) \cos(t+Y)) \stackrel{X, Y \text{ indep.}}{=} \\ &= E(\cos(t+X)) E(\cos(t+Y)) \end{aligned}$$

$$E(\cos(t+X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cos(t+x) dx$$

-12-

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(t+x) dx = \frac{1}{2\pi} \sin(t+x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\sin(t+\pi) - \sin(t-\pi)) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\sin(t+\pi) - \sin(t+\pi-2\pi)) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\sin(t+\pi) - \sin(t+\pi)) = 0
 \end{aligned}$$

De la mateixa manera s'verria (no cal) que $E(\cos(t+Y)) = 0$. Tenim així:

$$E(Z_t) = 0$$

$$\begin{aligned}
 E(Z_{t+\tau} Z_t) &= E(\cos(t+\tau+X) \cos(t+\tau+Y) \cos(t+X) \cos(t+Y)) \\
 &\stackrel{\substack{\uparrow \\ X, Y \text{ indep.}}}{=} E(\cos(t+\tau+X) \cos(t+X)) E(\cos(t+\tau+Y) \cos(t+Y))
 \end{aligned}$$

Com que X i Y estan igualment distribuïdes i tenim la mateixa funció en els dos casos, les dues esperances donaran el mateix valor i sols cal calcular-ne una:

$$\begin{aligned}
 E(\cos(t+\tau+X) \cos(t+X)) &= \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_X(x) \cos(t+\tau+x) \cos(t+x) = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{2\pi} \cos(t+\tau+x) \cos(t+x)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \left\{ \cos(2t + 2x + \tau) + \cos \tau \right\}$$

$$\left[\cos A \cos B = \frac{1}{2} \left\{ \cos(A+B) + \cos(A-B) \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \sin(2t + \tau + 2x) \right|_{x=-\pi}^{x=\pi} + 2\pi \cos \tau \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ 0 + 2\pi \cos \tau \right\} = \frac{\cos \tau}{2}$$

Per tant el procés és estacionari i

$$R_Z(\tau) = E(Z_{t+\tau} Z_t) = \frac{\cos^2 \tau}{4}$$

(c)

$$G_Z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_Z(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

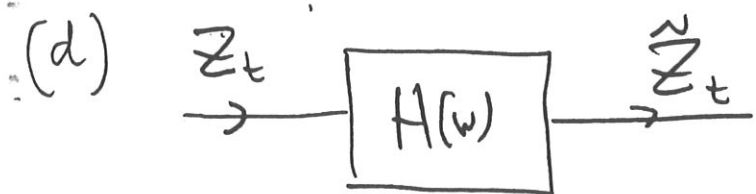
$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \tau e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2} \right]^2 e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2i\tau} + e^{-2i\tau} + 2) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\tau(\omega-2)} + e^{-i\tau(\omega+2)} + 2e^{-i\omega\tau}) d\tau$$

$$= \frac{1}{16} 2\pi (\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2) + 2\delta(\omega))$$

$$= \frac{\pi}{8} (\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2) + 2\delta(\omega))$$



$$G_{\hat{Z}}(w) = |H(w)|^2 G_Z(w)$$

$$= \frac{\sin^2 \pi w}{w^2} \frac{\pi}{8} (\delta(w-2) + \delta(w+2) + 2\delta(w))$$

$$PPT_{\hat{Z}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\hat{Z}}(w) dw =$$

$$= \frac{1}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \pi w}{w^2} (\delta(w-2) + \delta(w+2) + 2\delta(w)) dw$$

$$= \frac{1}{16} \left\{ \frac{\sin^2 2\pi}{2^2} + \frac{\sin^2(-2\pi)}{(-2)^2} + 2 \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \pi w}{w^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \pi w}{w^2} = \frac{1}{8} \pi^2$$

⑦ (a) $\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \right.$
 $(2,1), (2,2), \dots, (2,6),$
 $\vdots$
 $(6,1), (6,2), \dots, (6,6) \left. \right\}$

Ω té 36 elements, tot amb la matriu probabilitat i, per tant, si $A = \{ \text{matriu probabilitat} \}$
 $= \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \}$

$$\text{donc } P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b)

$$X = B(50, 1/6)$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \binom{50}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{50-2} \\ &= \frac{50!}{48! 2!} \frac{1}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{48} = \frac{50 \times 49}{2} \frac{1}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{48} \\ &\approx 5.38 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

El resultat es pot obtenir aproximant per una normal

$$Z = \frac{X - 50 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)}} = \frac{6X - 50}{\sqrt{250}} \approx N(0,1)$$

Uavors

$$\begin{aligned} P(X=2) &\approx P\left(\frac{6 \times 1.5 - 50}{\sqrt{250}} \leq Z \leq \frac{6 \times 2.5 - 50}{\sqrt{250}}\right) \\ &= P(-2.59 \leq Z \leq -2.21) \\ &= F_{N(0,1)}(-2.21) - F_{N(0,1)}(-2.59) \\ &= [1 - F_{N(0,1)}(2.21)] - [1 - F_{N(0,1)}(2.59)] \\ &= F_{N(0,1)}(2.59) - F_{N(0,1)}(2.21) \\ &= 0.9952 - 0.9864 = 8.8 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

En termes relatius, l'aproximació no és gaire bona.

$$(c) \quad X = B(50, 1/6)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 10) &= 1 - P(\bar{X} \leq 10) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{50}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{50-k} \end{aligned}$$

En acest caz se poate rezulta convenient a aproxima
 pe la normal

$$N(0,1) \approx Z = \frac{\bar{X} - 50 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = \frac{6\bar{X} - 50}{\sqrt{250}}$$

Seri

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 10) &= 1 - P(\bar{X} \leq 10) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{6 \times 10.5 - 50}{\sqrt{250}}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.82) \\ &= 1 - F_{N(0,1)}(0.82) = \\ &= 1 - 0.7939 = 0.2061 \end{aligned}$$

El calcul directe senza a aproxima dona

$$1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{50}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{50-k} = 0.2014$$

⑧

(a) De $8y_n - 6y_{n-1} + y_{n-2} = x_n$

Vegim directament

$$H(z) = \frac{z^2}{8z^2 - 6z + 1}$$

Els pols de $H(z)$ són els zeros del denominador

$$8z^2 - 6z + 1 = 0$$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \begin{cases} 1/2 \\ 1/4 \end{cases}$$

(b) Hem de descompondre $H(z)$ en fraccions simples:

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{8z^2 - 6z + 1} &= \frac{1}{8} \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \frac{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} + \frac{\frac{3}{4}z - \frac{1}{8}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \right\} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \frac{\frac{3}{4}z - \frac{1}{8}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left\{ \frac{A}{z - 1/2} + \frac{B}{z - 1/4} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = 3/4 \\ -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B = -1/8 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1/4 \end{cases}$$

Termin així

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \frac{1}{z - 1/2} - \frac{1}{32} \frac{1}{z - 1/4} \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} - \frac{1}{32z} \frac{1}{1 - \frac{1}{4z}} \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2z)^k} - \frac{1}{32z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4z)^k} \\
 |z| &> \frac{1}{2} \\
 |z| &> \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} z^{-k-1} - \frac{1}{32} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} z^{-k-1} \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} z^{-k} - \frac{1}{32} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{k-1}} z^{-k} \\
 &= \frac{1}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{k+2}} - \frac{1}{32} \frac{1}{4^{k-1}} \right) z^{-k}
 \end{aligned}$$

Per tant $h_0 = \frac{1}{8}$, $h_k = \frac{1}{2^{k+2}} - \frac{1}{32} \frac{1}{4^{k-1}}$, $k \geq 1$

que es pot escriure tot plegat com

$$h_k = \frac{1}{2^{k+2}} - \frac{1}{32} \frac{1}{4^{k-1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Hom pot trobar els primers termes de la solució de l'equació en diferències sota l'entesa

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{altament} \end{cases}$$

i veure que coincideixen amb el resultat general obtingut. Per exemple, si $n=0$

$$8y_0 = x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{8} = h_0$$

Si $n=1$

$$8y_1 - 6y_0 = x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{3}{4}y_0 = \frac{3}{32} = h_1$$

Si $n=2$

$$8y_2 - 6y_1 + y_0 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow 8y_2 = 6y_1 - y_0 = \frac{18}{32} - \frac{1}{8} = \frac{14}{32}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{7}{128} = h_2$$

At.

Tenim que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0$$

el que vol dir que el sistema és asintòticament estable. Així $\Rightarrow$ deduir també del llt de que els pols de $H(z)$ tenen mòdul < 1 .

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Setembre 94

- Cada problema val els punts que s'indica, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Les notes sortiran el dia 12 de setembre (dilluns) i les revisions seran el dia 16 de setembre (divendres).
- Primer parcial: problemes 1, 2, 3, 4; segon parcial: problemes 5, 6, 7, 8; examen final: problemes 3, 4, 5, 6.

1. Considereu a $\mathbb{R}^3$ el camp de forces $\vec{F}(x, y, z) = (y, 3y^3 - x, z)$.
 - (a) Es $\vec{F}$ conservatiu? Es solenoïdal? (5 p.)
 - (b) Calculeu el treball realitzat per $\vec{F}$ en desplaçar una partícula per la corba $\vec{\sigma}(t) = (t, t^n, 0)$, entre $t = 0$ i $t = 1$, per a qualsevol $n = 1, 2, 3, \dots$ (10 p.)
 - (c) Calculeu el límit del treball anterior quan $n \rightarrow +\infty$. (5 p.)
 - (d) Calculeu l'únic valor del paràmetre n de la corba que fa que el treball sigui nul. (5 p.)

2. Sigui $f(t)$ un senyal periòdic de període $T > 0$ que entre $-T/2$ i $T/2$ està definit per

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq T/4, \\ -1 & \text{si } T/4 < |t| \leq T/2. \end{cases}$$

- (a) Dibuixeu la gràfica de $f(t)$ entre $t = -2T$ i $t = 2T$. (5 p.)
- (b) Demostreu que la sèrie de Fourier de $f(t)$ és

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \cos \frac{(2n-1)2\pi}{T} t,$$

i justifiqueu que no hi apareixin termes en sinus ni tampoc el terme constant. (15 p.)

- (c) Calculeu, emprant el resultat anterior,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}. \quad (5 \text{ p.})$$

3. Calculeu, emprant el teorema dels residus,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + \sin \theta} d\theta. \quad (25 \text{ p.})$$

4. Sigui a $\mathbb{R}^3$ el camp vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (axyz + (a-1)z^2, \frac{1}{2}x^2z, \frac{1}{2}x^2y).$$

- (a) Demostreu que hi ha un únic valor del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ que fa que $\vec{F}$ sigui conservatiu. (5 p.)
- (b) Amb el valor d' a determinat a l'apartat anterior, calculeu el potencial f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ i $f(0, 0, 0) = 1$. (5 p.)

- (c) Sigui S la superfície formada pel primer octant d'una superfície esfèrica de radi $\sqrt{3}$ amb centre a l'origen. Sigui $\vec{G}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calculeu

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{s},$$

on $\vec{F}$ és el camp conservatiu de l'apartat (4a) i S està orientada de manera que la tercera component de la normal és negativa. (15 p.)

5. La vida mitjana d'un pneumàtic PUNX700 abans de punxar sota condicions d'ús normals és de 5 anys. El temps de vida, T , en anys, abans de punxar, és una variable aleatòria exponencial

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

- (a) Demostreu que $\lambda = 1/5$. (5 p.)
 (b) Calculeu la probabilitat de què un pneumàtic qualsevol punxi abans de dos anys. (10 p.)
 (c) Si tenim 1000 pneumàtics, calculeu la probabilitat de què 100 o més punxin abans de 2 anys. (10 p.)

6. Sigui X_t un procés Gaussià estacionari amb $E(X_t) = 0$ i funció d'autocorrelació $R_X(\tau) = 2\delta(\tau)$.

- (a) Trobeu la densitat espectral de X_t . (5 p.)
 (b) Suposeu que el procés es passa per un filtre amb resposta impulsiva $h(t) = \theta(t)e^{-t}$. Demostreu que la densitat espectral del procés Y_t de sortida val $G_Y(\omega) = 2/(1 + \omega^2)$. (10 p.)

- (c) Calculeu l'esperança i autocorrelació del procés de sortida Y_t . (10 p.)

7. Siguin X, Y variables aleatòries contínues amb funció de densitat conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{2}} x e^{-x(y+1)} & \text{si } x, y > 0, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

- (a) Demostreu que $k = \sqrt{2}$. (5 p.)
 (b) Calculeu $P(\{X < 2\} \cap \{Y < 1\})$. (5 p.)
 (c) Calculeu $E(X)$. (5 p.)
 (d) Calculeu la probabilitat condicionada

$$P(|X| > 2 \mid Y \geq 1). \quad (10 \text{ p.})$$

8. (a) Calculeu la transformada z de la successió $x_0 = 0, x_k = 2^{-k}, k \geq 1$. (5 p.)
 (b) Trobeu la funció de transferència discreta d'un sistema amb resposta impulsiva discreta $h_0 = 2, h_1 = 3, h_k = 0, k \geq 2$. (5 p.)

- (c) Trobeu l'equació en diferències que representa al sistema de l'apartat (8b). (5 p.)

- (d) Calculeu la resposta del sistema de l'apartat (8b) a l'entrada $u_k = 2^{-k}, k \geq 0$ (podeu, si voleu, utilitzar en part el resultat de l'apartat (8a)). (10 p.)

-1-

EXAMEN RESOLT D'AMAE D'ETT

EUPVG Setembre 1994

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_0^{2\pi} \frac{65\theta}{3+\sin\theta} d\theta &= \oint_{C(0,1)} \frac{\frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z}\right)}{3 + \frac{1}{zi} \left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} \\
 e^{i\theta} = z &\uparrow \\
 &= \oint_{C(0,1)} \frac{z + \frac{1}{z}}{6iz + z^2 - 1} dz = \oint_{C(0,1)} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 6iz - 1)} dz
 \end{aligned}$$

pols $\begin{cases} z = 0 \end{cases}$

$$z^2 + 6iz - 1 = 0 \Rightarrow z = 3i \pm i2\sqrt{2}$$

pols d'ordre 1

$\begin{cases} i(3+2\sqrt{2}) \text{ exterior a } C(0,1) \\ i(3-2\sqrt{2}) \text{ interior a } C(0,1) \end{cases}$

$$\oint_{C(0,1)} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 6iz - 1)} dz = 2\pi i \left(\text{Res}(z=0) + \text{Res}(z=i(3-2\sqrt{2})) \right)$$

$$\text{Res}(z=0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 6iz - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{z^2 + 6iz - 1} = -1$$

$$\text{Res}(z=i(3-2\sqrt{2})) = \lim_{z \rightarrow i(3-2\sqrt{2})} (z - i(3-2\sqrt{2})) \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 6iz - 1)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow i(3-2\sqrt{2})} \frac{z^2 + 1}{z(z - i(3+2\sqrt{2}))} = \frac{-(3-2\sqrt{2})^2 + 1}{i(3-2\sqrt{2})(-4i\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-9 - 8 + 12\sqrt{2} + 1}{12\sqrt{2} - 16} = 1$$

Per tant

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + \sin \theta} d\theta = \oint_{C(0,1)} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 6iz - 1)} dz$$

$$= 2\pi i (-1 + 1) = 0$$

resultat, d'altre banda, obri per càlcul directe.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + \sin \theta} d\theta = \log(3 + \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} = \log 3 - \log 3 = 0$$

$$(4) \quad \vec{F}(x, y, z) = (axyz + (a-1)z^2, \frac{1}{2}x^2z, \frac{1}{2}x^2y)$$

$$(a) \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2, axy + 2z(a-1) - xy, xz - axz \right)$$

Lavors, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$$(b) \quad \vec{F}(x, y, z) = (xyz, \frac{1}{2}x^2z, \frac{1}{2}x^2y)$$

$$xyz = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2yz + \varphi(y, z)$$

$$\frac{1}{2}x^2z = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(y, z) = \gamma(z)$$

$$\frac{1}{2} x^2 y = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} x^2 y + \gamma'(z) \Rightarrow \gamma'(z) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma(z) = C_1$$

Per tant

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} x^2 y z + C_1$$

$$\text{Si } f(0, 0, 0) = 1 \text{ serà}$$

$$1 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

i així

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} x^2 y z + 1$$

$$(c) \text{ Com que } \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \text{ serà}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

La parametrització de S és

$$\left. \begin{aligned} x(\theta, \varphi) &= \sqrt{3} \sin \theta \cos \varphi \\ y(\theta, \varphi) &= \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi \\ z(\theta, \varphi) &= \sqrt{3} \cos \theta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \theta &\in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \varphi &\in [0, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

la normal $\vec{T}_0 \times \vec{T}_\varphi$ és

$$(3 \sin^2 \theta \cos \varphi, 3 \sin^2 \theta \sin \varphi, 3 \sin \theta \cos \theta)$$

En els punts del primer octant $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 i fa $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ i, per tant, si volem
 $n_z < 0$ haurém d'afegir

$$\vec{n}(\theta, \varphi) = (-3 \sin^2 \theta \cos \varphi, -3 \sin^2 \theta \sin \varphi, -3 \sin \theta \cos \theta)$$

Lavors, amb $\vec{G}(x, y, z) = (x, y, z) = (\sqrt{3} \sin \theta \cos \varphi, \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi, \sqrt{3} \cos \theta)$

$$\int_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi (-3\sqrt{3}) [\sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \theta]$$

$$= -3\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta)$$

$$= -3\sqrt{3} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta = -\frac{3\sqrt{3} \pi}{2}$$

$$(5) \quad f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{altrement} \end{cases}$$

$$E(T) = 5$$

$$\begin{aligned} (a) \quad E(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \right) \Big|_0^{+\infty} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad P(T \leq 2) &= \int_{-\infty}^2 f_T(t) dt = \\ &= \int_0^2 \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}t} dt = -e^{-\frac{1}{5}t} \Big|_0^2 = \\ &= 1 - e^{-\frac{2}{5}} \simeq 0.32968 \end{aligned}$$

(c) $X \equiv$ nombre de pneumatiques que punxen abans de dos anys

$$X = B(1000, 0.32968)$$

Heu de calcular $P(X \geq 100) = 1 - P(X < 100)$

Calcularem $P(X < 100)$ aproximant per una normal

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{X - 1000 \times 0.32968}{\sqrt{1000 \times 0.32968 (1 - 0.32968)}} = \\ &= \frac{X - 3296.8}{14.86577} \simeq N(0,1) \end{aligned}$$

Lavors

$$\begin{aligned} P(X < 100) &\approx P\left(Z_1 < \frac{99.5 - 329.68}{14.86577}\right) \\ &= F_{N(0,1)}(-15.48) = 1 - F_{N(0,1)}(15.48) \end{aligned}$$

Com que, dins la precessió usual, $F_{N(0,1)}(3.99) \approx 1$,
 Serà $F_{N(0,1)}(15.48) \approx 1$ i $P(X < 100) \approx 0$.

Per tant

$$P(X \geq 100) \approx 1$$

tal com era d'esperar donada la quantitat implicada.

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad (a) \quad G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) e^{-i\omega z} dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z \delta(z) e^{-i\omega z} dz = z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad H(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-(1+i\omega)} e^{-(1+i\omega)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+i\omega} \end{aligned}$$

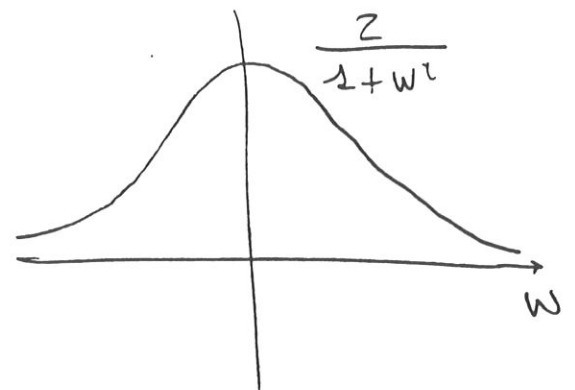
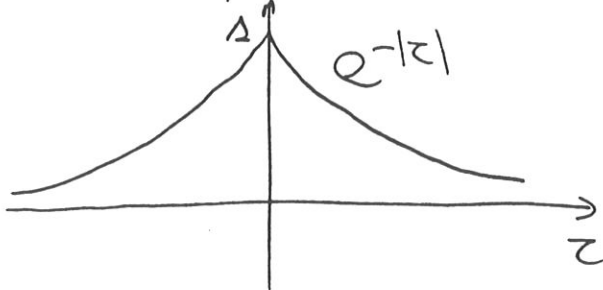
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+i\omega} \frac{1}{1-i\omega} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$G_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 G_X(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad E(Z_t) &= E(X_t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \\
 &= 0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_Z(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_Z(w) e^{i w z} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{1+w^2} e^{i w z} dw
 \end{aligned}$$

Sabem que



Por tanto $R_Z(z) = e^{-|z|}$

$$(7) \quad f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{2}} x e^{-x(y+1)} & \text{si } x, y > 0 \\ 0 & \text{alternament} \end{cases}$$

$$(a) \quad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot f(x,y) = \frac{k}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \cdot x e^{-x(y+1)}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} dx \left(-e^{-x(y+1)} \right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} dx e^{-x} = \frac{k}{\sqrt{2}} \left(-e^{-x} \right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

$$(b) \quad P(\{X < 2\} \cap \{Y < 1\}) =$$

$$= \int_{-\infty}^2 dx \int_{-\infty}^1 dy f_{XY}(x, y) =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^1 dy x e^{-x(y+1)} = \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4} - e^{-2} \approx 0.3738$$

$$(c) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy x f_{XY}(x, y)$$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy x^2 e^{-x(y+1)} = \dots = 1$$

$$(d) \quad P(|X| > 2 \mid Y \geq 1) = \frac{P(|X| > 2 \cap Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)}$$

$$P(|X| > 2 \cap Y \geq 1) = \int_{|x| > 2} dx \int_1^{+\infty} dy f_{XY}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{-2} dx \int_1^{+\infty} dy f_{XX}(x,y) + \int_2^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy f_{XX}(x,y) \\
&= \int_2^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy x e^{-x(y+1)} = \dots = \frac{e^{-4}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy f_{XX}(x,y) \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy x e^{-x(y+1)} = \dots = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}
P(|X| > 2 \mid X \geq 1) &= \frac{e^{-4}/2}{1/2} \\
&= e^{-4} \approx 0.0183
\end{aligned}$$

⑧ (a) $X_0 = 0$, $X_k = z^{-k}$ $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} z^{-k} z^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(zz)^k} \stackrel{|z| > \frac{1}{2}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{zz}} - 1 = \\
&= \frac{zz}{zz - 1} - 1 = \frac{1}{zz - 1},
\end{aligned}$$

$$(b) \quad h_0 = 2, \quad h_1 = 3, \quad h_k = 0, \quad k \geq 2$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^{-k} = 2 + \frac{3}{z}$$

(c)

$$H(z) = 2 + \frac{3}{z} = \frac{2z + 3}{z}$$

i, par tant, si $u_k \xrightarrow{\quad} \boxed{H(z)} \rightarrow y_k$

$$y_k = 2u_k + 3u_{k-1}$$

(d)

$$Y(z) = H(z) U(z)$$

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2z)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left(2 + \frac{3}{z}\right) \left(\frac{2z}{2z - 1}\right) = \\ &= 2 \frac{2z}{2z - 1} + 6 \frac{1}{2z - 1} \end{aligned}$$

L'antitransformada de $\frac{2z}{2z-1}$ és 2^{-k} , $k \geq 0$, mentre que la de $\frac{1}{2z-1}$, calculada a l'apartat (a), és 2^{-k} , $k \geq 1$

Per tant

$$y_k = \begin{cases} 2 \cdot 1 = 2 & \text{si } k=0 \\ 2 \cdot 2^{-k} + 6 \cdot 2^{-k} = 8 \cdot 2^{-k} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Febrer 95

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Les notes sortiran el dia 15 de febrer (dimecres) i les revisions seran el dia 17 de febrer (divendres).

1. (a) Calculeu el treball realitzat per la força:

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, e^z)$$

sobre una partícula que es mou per la corba d'equació $\{x^2 + y^2 x^3 = 1, z = 0\}$ entre els punts $(-1, 0, 0)$ i $(1, 0, 0)$. (10 p.)

- (b) Sigui S la superfície $z = e^{x^2+y^2}$, entre els plans $z = 1$ i $z = 2$. Calculeu

$$\int_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{on} \quad \vec{F}(x, y, z) = (2y, z, y) \quad (20p.)$$

Indicació: per la parametrització de S o de la seva vora, preneu a x i y coordenades polars.

2. Sigui $f(z) = \frac{e^{i\sqrt{7}z}}{(z^2 + 4)^2}$

MULTIPLICATIS

- (a) Calculeu tots els pols de $f(z)$, els seus ordres i els seus residus. (15 p.)

- (b) Demostreu que

$$\int_0^\infty \frac{\cos \sqrt{7}x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi(1 + 2\sqrt{7})}{32} e^{-2\sqrt{7}}. \quad (15 p.)$$

3. Sigui $s(t)$ un senyal periòdic de període 2π , que a l'interval $[-\pi, \pi]$ està definit per

$$s(t) = \begin{cases} -t & \text{si } -\pi \leq t \leq 0, \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

- (a) Dibuixeu la gràfica de s a l'interval $[-5\pi, 5\pi]$. (5 p.)
 (b) Trobeu les sèries de Fourier complexa i real de $s(t)$. (12 p.)
 (c) Utilitzeu l'apartat (b) per deduir el valor de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \quad (3 p.)$$

4. (a) Sigui $s(t)$ l'extensió periòdica de $\sin(2\pi t) + \frac{1}{3} \cos(\frac{25\pi}{3}t)$ a l'interval $[0, 6]$. Calculeu el mínim nombre parell de punts amb què s'ha de fer el mostreig de s a $[0, 6]$ per tal d'evitar l'*aliasing*. (10 p.)

- (b) Sigui $\{x_k\}$, $k = 0, \dots, 7$ un senyal discret amb DFT en 8 punts $\{X_n\}_{0 \leq n \leq 7} = \{0, 2, 3 - i, 6, 5, 6, 3 + i, 2\}$. Sigui $\{y_l\}$, $l = 0, \dots, 15$ el senyal discret obtingut a partir de $\{x_k\}$ afegint-hi 8 zeros al final, és a dir

$$y_l = \begin{cases} x_l & \text{si } l = 0, \dots, 7, \\ 0 & \text{si } l = 8, \dots, 15 \end{cases}$$

Calculeu Y_2 i Y_{12} (coeficients de la DFT de $\{y_l\}$). (10 p.)

1.(a). Calcular el treball realitzat per la força:

$\vec{F}(x,y,z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, e^z)$
sobre una partícula que es mou en la corba d'equació
 $x^2 + y^2 + z^3 = 1, z=0$ entre els punts $(-1,0,0)$ i $(1,0,0)$.

$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$. Donat que el camp $\vec{F}$ es conservatiu
(doncs, $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^x \sin y & e^x \cos y & e^z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$), podem usar el teorema del gradient per fer aquesta integral de línia.

$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, on f és un camp escalar tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. $\gamma(b)$ i $\gamma(a)$ extrems i origen de la corba respectivament.

Troblem potencial f :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f = \vec{F} &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y \rightarrow f(x,y,z) = e^x \sin y + K_1(y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x \cos y \rightarrow f(x,y,z) = e^x \sin y + K_2(x,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= e^z \rightarrow f(x,y,z) = e^z + K_3(x,y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = e^x \sin y + e^z + K.$$

Ara:

$$W = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(1,0,0) - f(-1,0,0) = 0.$$

$$1 - 1 = 0$$

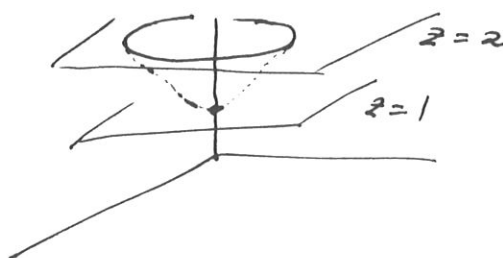
1. (b). Sigui S la superfície $z = e^{x^2+y^2}$ entre els plans $z=1$ i $z=2$.

Calcular: $\int_S \text{rot } \vec{F} \, ds$, $\vec{F} = (2y, z, y)$

Calcularem aquesta integral de superfície, usant el Teorema d'Stookes, tot i que es pot fer directament (al llavors trobar una parametrització de la superfície S usant coordenades polars)

Sigui S superfície $z = e^{x^2+y^2}$ amb vora:

$$\begin{aligned} & \{ (x, y, z) \text{ tal que } 1 = e^{x^2+y^2} \text{ i } 2 = e^{x^2+y^2} \} \\ & = \{ (x, y, z) \text{ tal que } \begin{cases} \ln 1 = \ln e^{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=0 \end{cases} \text{ i } x^2+y^2 = \ln 2, z=2 \} \\ & = \{ (0, 0, 1) \} \cup \{ (x, y, z) \mid x^2+y^2 = \ln 2, z=2 \} \end{aligned}$$



Per tant, la vora de la superfície S es una circumferència en el pla $z=2$, de centre $(0, 0, 2)$ i radi $\sqrt{\ln 2}$.

Per teorema d'Stookes:

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \, ds = \int_{\partial S} \vec{F} \, d\ell$$

amb S i ∂S orientades adequadament.

Parametritzeu la vora de S:

$$\begin{aligned} \sigma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\longrightarrow (\sqrt{\ln 2} \cos \theta, \sqrt{\ln 2} \sin \theta, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \, d\ell &= \int_0^{2\pi} (2\sqrt{\ln 2} \sin \theta, 2, \sqrt{\ln 2} \cos \theta) \cdot \overbrace{(\sqrt{\ln 2} \sin \theta, \sqrt{\ln 2} \cos \theta, 0)}^{(x, y, z)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -2\sqrt{\ln 2} \sin^2 \theta + 2\sqrt{\ln 2} \cos \theta \, d\theta \\ &= \underline{\underline{-2\pi \ln 2}} \quad \uparrow \quad \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \end{aligned}$$

Nota: 1- La parametrització de la superfície S és:

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] \times [0, \sqrt{\ln 2}] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, r) &\longrightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta, e^{r^2}) \end{aligned}$$

2- Donat que no ens diuen quina és l'orientació de la superfície, podem orientar-la com vulguem, al igual que la seva vora.

$$\underline{\Phi}(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, e^{r^2})$$

$$\vec{F} = (2x, z, y) \rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = (0, 0, -2)$$

$$\begin{aligned} \vec{T}_\theta &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \\ \vec{T}_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 2r e^{r^2}) \\ \vec{n} &= \vec{T}_r \wedge \vec{T}_\theta \rightarrow \vec{n} = (r, -r, r) \end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot \vec{F}) \vec{n} = -2r$$

$$\int_S (\nabla \cdot \vec{F}) \, dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\ln 2}} -2r \, dr = 2\pi (-2) \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} = \underline{\underline{-2\pi \ln 2}}$$

2.(a). Sigui $f(z) = \frac{e^{i\sqrt{7}z}}{(z^2+4)^2}$

Calcular tots els pols de $f(z)$, les seves multiplicitats i els seus residus.

• Pols de $f(z)$: $z^2+4=0 \Rightarrow \underline{z = \pm 2i}$

• Multiplicitats dels pols de $f(z)$:

Donat que $e^{i\sqrt{7}z}$ és una funció holomorfa no nul·la, les multiplicitats corresponen a les de la funció

$$\frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2} \Rightarrow \begin{array}{ll} 2i & \text{té multiplicitat dos.} \\ -2i & \text{té " " dos.} \end{array}$$

• Residus de $2i$ i $-2i$.

$$\text{Res}(f(z), 2i) = \frac{1}{k-1} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \left((z-2i)^k f(z) \right)$$

per $k=2$: $\frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\partial}{\partial z} \left((z-2i)^2 f(z) \right)$
multiplicitat. $= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{i\sqrt{7}z}}{(z+2i)^2} \right) = \frac{(1-2-4\sqrt{7})}{-64i} e^{-2\sqrt{7}}$

$$\text{Res}(f(z), -2i) = \frac{e^{2\sqrt{7}}}{64i} (4\sqrt{7}-2) \quad \swarrow y = \frac{e^{i\sqrt{7}z} [-i\sqrt{7}(z+2i)-2]}{(z+2i)^3}$$

2(b) Demostreu que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \sqrt{7}x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi(1+2\sqrt{7})}{32} \cdot e^{-2\sqrt{7}}$$

Farem aquesta integral real, usant integració complexa.

Donat que $f(x) = \frac{\cos \sqrt{7} x}{(x^2 + 4)^2}$ és una funció parell:

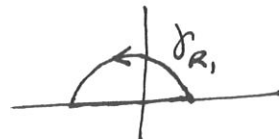
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \sqrt{7} x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{7} x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{7} x}{(x^2 + 4)^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{e^{i\sqrt{7}x} + e^{-i\sqrt{7}x}}{(x^2 + 4)^2} dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{7}x}}{(x^2 + 4)^2} dx}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sqrt{7}x}}{(x^2 + 4)^2} dx}_{(II)} \end{aligned}$$

Tant (I) com (II) són integrals de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{P(x)} dx$ amb $P(x)$ polinomi sense arrels en l'eix real.

Per tant:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{7}x}}{(x^2 + 4)^2} dx = \int_{\gamma_{R_1}} \frac{e^{i\sqrt{7}z}}{(z^2 + 4)^2} dz,$$



γ_{R_1} : semicircumferència que conté el pol $2i$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sqrt{7}x}}{(x^2 + 4)^2} dx = - \int_{\gamma_{R_2}} \frac{e^{-i\sqrt{7}z}}{(z^2 + 4)^2} dz,$$



γ_{R_2} : semicircumferència que conté el pol $-2i$.

$$\int_{\gamma_{R_1}} \frac{e^{i\sqrt{7}z}}{(z^2 + 4)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), 2i\right) = \frac{2\pi i \cdot (-2 - 4\sqrt{7})e^{-2\sqrt{7}}}{(4i)^3} //$$

apartat (a)

$$\int_{\gamma_{R_2}} \frac{e^{-i\sqrt{7}z}}{(z^2 + 4)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), -2i\right) = \frac{2\pi i \cdot (4\sqrt{7} - 2)e^{-2\sqrt{7}}}{(-4i)^3} //$$

apartat (a)

Per tant, $\int_0^{\infty} \frac{\cos \sqrt{7} x}{(x^2+4)^2} dx$

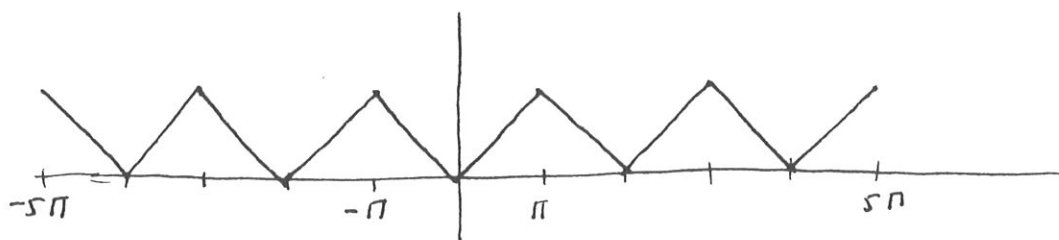
$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi i}{(4i)^3} (-2-4\sqrt{7}) e^{-2\sqrt{7}} \right)}_{(I)} - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi i}{(-4i)^3} (-2-4\sqrt{7}) e^{-2\sqrt{7}} \right)}_{(II)} \right)$$

$$= \frac{\pi (1+2\sqrt{7})}{32} e^{-2\sqrt{7}}$$

3. Sigui $s(t)$ un senyal periòdic de període 2π , que a l'interval $[-\pi, \pi]$ està definit per

$$s(t) = \begin{cases} -t & \text{si } -\pi \leq t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

a) Dibuixeu la gràfica de s a l'interval $[-5\pi, 5\pi]$



b) trobar la sèrie real i complexa.

Sèrie real:

Donat que la funció és parell $\Rightarrow b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(t \frac{\sin nt}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos nt}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\pi \frac{\sin n\pi}{n} - (0) \frac{\sin n(-\pi)}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos n(0)}{n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ parell } \text{ o } n=0 \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ senar } \end{cases} \quad \text{per } n=2m+1 \quad = \frac{8}{\pi(2m+1)^2}$$

Série de Fourier real :

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{2\pi (2n+1) t}{2\pi} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{\pi (2n+1)^2} \cos(2n+1)t. \end{aligned}$$

Per calcular la sèrie de Fourier complexa, usem la relació entre coeficients sèrie de Fourier real i complexa.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\pi}{2} & c_0 &= a_0/2 = \pi/4 \\ c_n &= \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ parell} \\ -\frac{2}{\pi (2n+1)^2} & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}, n > 0 \\ c_{-n} &= \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ parell} \\ \frac{-2i}{\pi (2n+1)^2} & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}, n > 0 \\ a_n &= \frac{-2i}{\pi (2n+1)^2} \end{aligned}$$

obtenim :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{-2}{\pi (2n+1)^2} e^{i(2n+1)t}$$

c) Utilitzem l'apartat b) per deduir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donat que la sèrie de Fourier de $\gamma(t)$ és

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi (2n+1)^2} \cos(2n+1)t$$

i la funció és contínua $\forall t$, en particular per $t=0$,
pel teorema de Dirichlet tenim:

$$s(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)0$$

$$0 = s(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2n+1)^2}$$

per tant,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(-\frac{\pi}{4}\right) \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8} //$$

4a) doncs $s(t)$ l'extensió periòdica de

$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{25\pi}{3}t\right)$$

a l'interval $[0, 6]$. Calculen el mínim nombre parell
de punts amb què s'ha de fer el mostreig de s
a $[0, 6]$ per tal d'evitar l'aliasing.

Vegem si la senyal és de banda limitada:

$$\begin{aligned} \sin 2\pi t + \frac{1}{3} \cos \frac{25\pi}{3} t &= \frac{1}{2i} e^{2\pi i t} - \frac{1}{2i} e^{-2\pi i t} + \frac{1}{6} e^{\frac{25\pi i}{3} t} + \frac{1}{6} e^{-\frac{25\pi i}{3} t} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2i}}_{c_6} e^{\frac{2\pi i}{6} t} - \underbrace{\frac{1}{2i}}_{c_{-6}} e^{\frac{2\pi i}{6} (-6) t} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{c_{25}} e^{\frac{2\pi i}{6} (25) t} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{c_{-25}} e^{\frac{2\pi i}{6} (-25) t} \end{aligned}$$

La sèrie de Fourier de la senyal $s(t)$ és de

la forma
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{6}}$$

amb coeficients diferents de zero:

$$c_6 = 1/2i, \quad c_{-6} = -1/2i$$

$$c_{25} = 1/6, \quad c_{-25} = 1/6$$

per tant és una senyal de banda limitada, pel qual podem aplicar el teorema que ens assegura la no existència d'aliasing a l'afegir:

$$N \text{ tal que } \Delta = \frac{T}{N} < \frac{1}{2f_0}, \text{ on } f_0 \text{ freqüència màxima.}$$

$$\text{en la nostra senyal } f_0 = \frac{25}{6}, \quad T = 6$$

$$\Rightarrow N > T \cdot 2f_0 = 6 \cdot 2 \cdot \frac{25}{6} = 50 \Rightarrow \underline{N \geq 50}$$

Nombre mínim de punts: $N=52$ amb 52 hi ha aliasing? No, però a 50 sí.

4.b. Aquí $\{x_k\}_{k=0,7}$ senyal discret amb $D=T$ en 8 punts

$$\{x_k\}_{0 \leq k \leq 7} = \{0, 2, 3-i, 6, 5, 6, 3+i, 2\}$$

Aquí $\{y_l\}_{l=0,15}$ el senyal discret obtingut a partir de $\{x_k\}$ afegint-li 8 zeros al final,

$$y_l = \begin{cases} x_l & \text{si } l=0,7 \\ 0 & \text{si } l=8,15 \end{cases}$$

calcular

$$\begin{aligned} Y_2 &= \sum_{k=0}^{15} y_k e^{\frac{-2\pi i 2k}{N}} = \sum_{k=0}^7 x_k e^{\frac{-2\pi i 2k}{16}} + \sum_{k=8}^{15} 0 e^{\frac{-2\pi i 2k}{16}} \\ &= \sum_{k=0}^7 x_k e^{\frac{-2\pi i k}{8}} = \sum_{k=0}^7 x_k e^{\frac{-2\pi i k}{8}} = \underline{\underline{X(1) = 0}} \end{aligned}$$

$\uparrow$ $n=1$ $\uparrow$ $2!!$

$$\begin{aligned}
 y_{12} &= \sum_{k=0}^{15} y_k e^{-\frac{2\pi i (12)k}{16}} = \sum_{k=0}^8 x_k e^{-\frac{2\pi i 6k}{8}} \quad \swarrow n=6 \\
 &= X_6 = 3+i //
 \end{aligned}$$

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Juny 95

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Cal justificar tots els càlculs. Si es fa servir algun resultat obtingut a classe, indiqueu-ho explícitament.
- Les notes sortiran el dia 14 de juny (dimecres) i les revisions seran el dia 19 de juny (dilluns).
- Primer parcial: problemes 1, 2, 3, 4; segon parcial: problemes 5, 6, 7, 8; examen final: problemes 3, 4, 5, 6.

1. Sigui el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = ((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} x, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} y, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} z) + \alpha (e^{-x^2}, \sin y, z^2 + 1).$$

on $n \in \mathbb{Z}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Demostreu que $\vec{F}$ és conservatiu per a tots els valors de α i n . (5 p.)
- (b) Si $\alpha = 0$ calculeu el potencial de $\vec{F}$, tractant el cas $n = -2$ per separat. (10 p.)

(c) Si $\alpha = 0$ i $n = 1995$, calculeu

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

on $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. (10 p.)

2. Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} dz$ en els següents casos, sempre amb orientació antihorària

- (a) C és el quadrat de vèrtexs $-1 - i, -1 + i, -3 + i, -3 - i$.
- (b) C és la circumferència $S(i, \sqrt{3})$.
- (c) C és la circumferència $S(0, \sqrt{2})$. (25 p.)

3. (a) Si $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$, calculeu $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, on S és la superfície formada pel tronc de con $x^2 + y^2 = z^2$ entre $z = 1$ i $z = 2$ junt amb la tapadora inferior $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$. (15 p.)

(b) Demostreu que:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz = \frac{4\sqrt{7}}{21} \pi$$

(15 p.)

4. Sigui $s(t) = \begin{cases} 8 & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ -8 & \text{si } 2 \leq t < 4 \end{cases}$ extesa amb període $T = 4$ a tota la recta real.

(a) Dibuixeu la gràfica de l'extensió periòdica a l'interval $[-6, 6]$.

(4 p.)

- (b) $s(t)$ és parella, senar, o no té cap tipus de simetria? (2 p.)
- (c) Trobeu la sèrie de Fourier real corresponent al senyal s . (7 p.)
- (d) Mostregeu el senyal $s(t)$ a l'interval $[0, 4]$ amb $N = 4$ punts i calculeu la corresponent DFT. (7 p.)

5. La diferència de potencial $y(t)$ a la sortida d'un circuit ve donada en termes de la diferència de potencial $u(t)$ a l'entrada per l'equació diferencial $y'(t) + 2y(t) = u(t)$.

(a) Trobeu la funció de transferència del sistema i deduiu que la resposta impulsiva és $h(t) = e^{-2t}\theta(t)$ (on $\theta(t)$ representa la funció de Heaviside). (10 p.)

(b) Calculeu la resposta $y(t)$ quan l'entrada és $u(t) = 2e^{-t}\theta(t)$ per dues vies:

i. Per convolució directa.

ii. Utilitzant les propietats de la transformada de Fourier respecte de la convolució. (15 p.)

6. Siguin X , Y variables aleatòries amb distribució normal, independents tals que el procés

$$Z(t) = X \cos t + 3Y \sin t$$

és estacionari amb $E(Z(t)) = 0$ i densitat espectral

$$G_Z(\omega) = 3\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

(a) Demostreu que $X = N(0, \sqrt{3})$ i $Y = N(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. (5 p.)

(b) Calculeu $P(Z(\pi) > Z(\pi/2))$. (5 p.)

(c) Calculeu la potència promig total de $Z(t)$. (5 p.)

(d) Si $Z(t)$ es passa per un filtre amb funció de transferència $H(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$, calculeu la potència promig total del procés de sortida. (5 p.)

(e) Calculeu l'esperança i la funció d'autocorrelació del procés de sortida de l'apartat anterior. (5 p.)

7. Sigui X la variable aleatòria absolutament contínua que ens dona l'error en mm que cometem en mesurar una barra de metall amb un determinat aparell. La funció característica de X és:

$$\phi_X(t) = \frac{1}{1 - it}$$

(a) Trobeu l'esperança i la variància de la variable aleatòria X . (5 p.)

(b) Demostreu que la funció de densitat de la variable aleatòria X és $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ (5 p.)

(c) Calculeu $P(X \leq 3)$. (5 p.)

(d) Siguin 100 barres mesurades de forma independent. Trobeu quina és la probabilitat de que l'error total comés en mesurar les 100 peces no superi els 120 mm. (10 p.)

8. (a) Resoleu l'equació en diferències

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = x_n$$

amb entrada $x_n = 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, i condicions inicials $y_{-1} = 0$, $y_{-2} = 0$. (20 p.)

(b) Què podeu dir de $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$? Quina relació té això amb els pols de la funció de transferència discreta? (5 p.)

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Juny 95

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Cal justificar tots els càlculs. Si es fa servir algun resultat obtingut a classe, indiqueu-ho explícitament.
- Les notes sortiran el dia 14 de juny (dimecres) i les revisions seran el dia 19 de juny (dilluns).
- Primer parcial: problemes 1, 2, 3, 4; segon parcial: problemes 5, 6, 7, 8; examen final: problemes 3, 4, 5, 6.

1. Sigui el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = ((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} x, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} y, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} z) + \alpha (e^{-x^2}, \sin y, z^2 + 1).$$

on $n \in \mathbb{Z}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Demostreu que $\vec{F}$ és conservatiu per a tots els valors de α i n . (5 p.)
- (b) Si $\alpha = 0$ calculeu el potencial de $\vec{F}$, tractant el cas $n = -2$ per separat. (10 p.)

(c) Si $\alpha = 0$ i $n = 1995$, calculeu

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{on } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}. \quad (10 \text{ p.})$$

2. Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} dz$ en els següents casos, sempre amb orientació antihorària
- (a) C és el quadrat de vèrtexs $-1 - i, -1 + i, -3 + i, -3 - i$.
- (b) C és la circumferència $S(i, \sqrt{3})$.
- (c) C és la circumferència $S(0, \sqrt{2})$. (25 p.)
3. (a) Si $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$, calculeu $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, on S és la superfície formada pel tronc de con $x^2 + y^2 = z^2$ entre $z = 1$ i $z = 2$ junt amb la tapadora inferior $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$. (15 p.)
- (b) Demostreu que:
- $$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz = \frac{4\sqrt{7}}{21} \pi$$
- (15 p.)
4. Sigui $s(t) = \begin{cases} 8 & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ -8 & \text{si } 2 \leq t < 4 \end{cases}$ extesa amb període $T = 4$ a tota la recta real.
- (a) Dibuixeu la gràfica de l'extensió periòdica a l'interval $[-6, 6]$. (4 p.)
- (b) $s(t)$ és parella, senar, o no té cap tipus de simetria? (2 p.)
- (c) Trobeu la sèrie de Fourier real corresponent al senyal s . (7 p.)
- (d) Mostregeu el senyal $s(t)$ a l'interval $[0, 4]$ amb $N = 4$ punts i calculeu la corresponent DFT. (7 p.)

5. La diferència de potencial $y(t)$ a la sortida d'un circuit ve donada en termes de la diferència de potencial $u(t)$ a l'entrada per l'equació diferencial $y'(t) + 2y(t) = u(t)$.

(a) Trobeu la funció de transferència del sistema i dedueu que la resposta impulsiva és $h(t) = e^{-2t}\theta(t)$ (on $\theta(t)$ representa la funció de Heaviside). (10 p.)

(b) Calculeu la resposta $y(t)$ quan l'entrada és $u(t) = 2e^{-t}\theta(t)$ per dues vies:

i. Per convolució directa.

ii. Utilitzant les propietats de la transformada de Fourier respecte de la convolució. (15 p.)

6. Siguin X , Y variables aleatòries amb distribució normal, independents tals que el procés

$$Z(t) = X \cos t + 3Y \sin t$$

és estacionari amb $E(Z(t)) = 0$ i densitat espectral

$$G_Z(\omega) = 3\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

(a) Demostreu que $X = N(0, \sqrt{3})$ i $Y = N(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. (5 p.)

(b) Calculeu $P(Z(\pi) > Z(\pi/2))$. (5 p.)

(c) Calculeu la potència promig total de $Z(t)$. (5 p.)

(d) Si $Z(t)$ es passa per un filtre amb funció de transferència $H(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$, calculeu la potència promig total del procés de sortida. (5 p.)

(e) Calculeu l'esperança i la funció d'autocorrelació del procés de sortida de l'apartat anterior. (5 p.)

7. Sigui X la variable aleatòria absolutament contínua que ens dona l'error en mm que cometem en mesurar una barra de metall amb un determinat aparell. La funció característica de X és:

$$\phi_X(t) = \frac{1}{1 - it}$$

(a) Trobeu l'esperança i la variància de la variable aleatòria X . (5 p.)

(b) Demostreu que la funció de densitat de la variable aleatòria X és $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ (5 p.)

(c) Calculeu $P(X \leq 3)$. (5 p.)

(d) Siguin 100 barres mesurades de forma independent. Trobeu quina és la probabilitat de que l'error total comés en mesurar les 100 peces no superi els 120 mm. (10 p.)

8. (a) Resoleu l'equació en diferències

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = x_n$$

amb entrada $x_n = 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, i condicions inicials $y_{-1} = 0$, $y_{-2} = 0$. (20 p.)

(b) Què podeu dir de $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$? Quina relació té això amb els pols de la funció de transferència discreta? (5 p.)

① (a)

Cal comprovar que $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ per qualsevol a i n

Notem $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, llavors:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2yz - \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2zy, \right. \\ &\quad \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2zx - \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2xz, \\ &\quad \left. \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2xy - \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2yx \right) \\ &= (0, 0, 0) \Rightarrow \vec{F} \text{ és conservatiu.} \end{aligned}$$

⑥ Si $a=0$, $\begin{cases} \vec{F}(x, y, z) = (r^2)^{n/2} x, (r^2)^{n/2} y, (r^2)^{n/2} z \end{cases}$, $n \neq -2$
 $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{r} x, \frac{1}{r} y, \frac{1}{r} z \right)$ per $n = -2$

Cal trobar f camp escalar tq $\nabla f = \vec{F}$

• Si $n \neq -2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} y \\ \frac{\partial f}{\partial z} = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} z \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{2 \left(\frac{n}{2} + 1 \right)} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2} + 1} + K.$$

és el potencial

• Si $n = -2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + K$$

és el potencial

(c) Podem usar el teorema de la divergencia, donde
 V es un sólido, con cara $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_S \vec{F} \, d\vec{S}$$

Parametrizem S : trobem el vector normal:

$$S: \begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \cos \theta \end{aligned} \quad \text{amb} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

Vector normal: (Producte vectorial dels vectors tangents)

$$\vec{T}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

$$\vec{T}_\varphi = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_\varphi = (\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta)$$

$$\iint_S \vec{F} \, d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{F}(x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)) (\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_\varphi) \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) (\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta) \, d\theta \, d\varphi$$

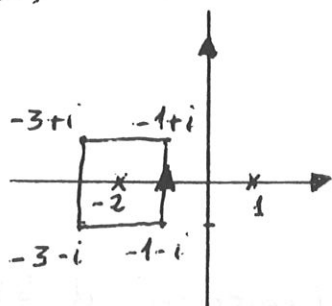
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = -\cos \theta \Big|_0^\pi \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 4\pi //$$

Nota: Es pot calcular la integral $\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$,
directament.

2

(a)



Els pols de $f(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}$ son

$$z = -2 \quad z = 1.$$

Per tant, dels residus:

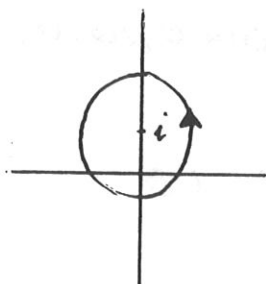
$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -2), \text{ doncs } -2 \in \mathbb{Q}, 1 \notin \mathbb{Q}.$$

$$\operatorname{Res}(f, -2) = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} = -\frac{4}{3}$$

Per tant,

$$\oint_C f(z) dz = -\frac{8\pi i}{3} //$$

(b)



El pol $z = 1 \in S(i, \sqrt{3})$

$z = -2 \notin S(i, \sqrt{3})$

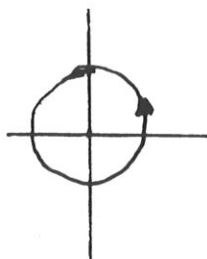
Per tant,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1)$$

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{3} //$$

(c)



El pol $z = 1 \in S(0, \sqrt{2})$

$z = -2 \notin S(0, \sqrt{2})$

Per tant,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1) = \frac{2\pi i}{3} //$$

3 a) S és un tronc de con amb vora:

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, z = 2\}$$



Orientem la vora

i apliquem el teorema d'Stokes:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \, d\vec{S} = \int_C \vec{F} \, d\ell$$

Parametritzeu la vora:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 2 \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

El vector tangent: $\gamma'(\theta) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \, d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2, 2\cos\theta, 2\sin\theta) \cdot (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -4\sin\theta + 4\cos^2\theta \, d\theta \\ &= 4(\cos\theta) \Big|_0^{2\pi} + 4\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Observació: La integral $\iint_S \text{rot } \vec{F} \, d\vec{S}$ es pot resoldre directament, i donat que S pot estar orientada de qualsevol forma, també és vàlid el resultat -4π .

3b Demostreu primer que:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz.$$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx$$

Fem el canvi: $z = e^{ix}$, $dz = iz dx$

$$\cos 2x = \frac{z^2 + 1/z^2}{2} = \frac{z^4 + 1}{2z^2}$$

A la vers:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 2 \oint_{S(0,1)} \frac{1}{8 - \frac{z^4 + 1}{2z^2}} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{2}{i} \oint_{S(0,1)} \frac{2z}{+16z^2 - z^4 - 1} dz = 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz.$$

Demostreu la segona igualtat:

$$4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz = \frac{4\sqrt{7}\pi}{21}.$$

Troben els pols de $f(z) = \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1}$ i posterior-

ment aplicarem el Teorema dels Residus:

Pol: z tals que $z^4 - 16z^2 + 1 = 0$

Resolem l'equació i obtenim: $z = \pm \sqrt{8 \pm 3\sqrt{7}}$

Per aquest quatre únicament dos pertanyen

al $D(0,1)$: $+ \sqrt{8 - 3\sqrt{7}}$ i $- \sqrt{8 - 3\sqrt{7}}$.

Calcular els residus en aquests pols d'ordre 1:

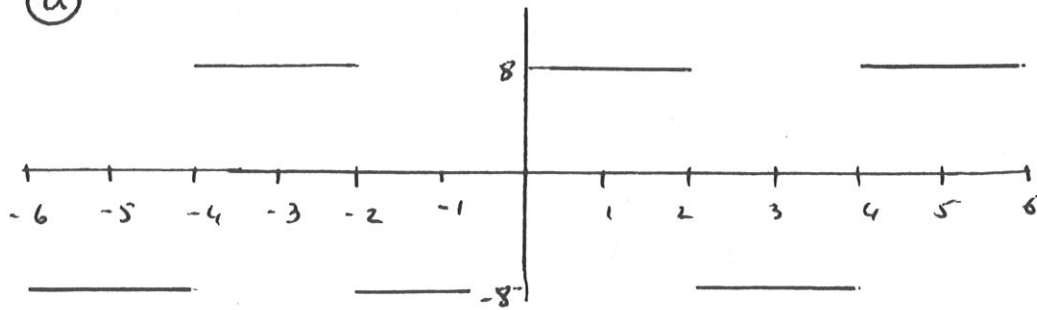
$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \sqrt{8-3\sqrt{7}}) &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{8-3\sqrt{7}}} \frac{(z - \sqrt{8-3\sqrt{7}}) z}{(z - \sqrt{8-3\sqrt{7}})(z + \sqrt{8-3\sqrt{7}})(z^2 - 8 - 3\sqrt{7})} \\ &= \frac{\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{2(\sqrt{8-3\sqrt{7}}) \cdot (-6\sqrt{7})} = \frac{1}{-12\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -\sqrt{8-3\sqrt{7}}) &= \lim_{z \rightarrow -\sqrt{8-3\sqrt{7}}} (z + \sqrt{8-3\sqrt{7}}) \cdot f(z) = \\ &= \frac{-\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{-2(\sqrt{8-3\sqrt{7}})(-6\sqrt{7})} = \frac{1}{-12\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz &= 4i \left[2\pi i (\text{Res}(f, \sqrt{8-3\sqrt{7}}) + \text{Res}(f, -\sqrt{8-3\sqrt{7}})) \right] \\ &= -8\pi \left(\frac{1}{-12\sqrt{7}} + \frac{1}{-12\sqrt{7}} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{7}} = \frac{4\pi\sqrt{7}}{21} // \end{aligned}$$

4

(a)



(b) $s(t)$ és senar doncs $s(t) = -s(-t)$

(c) Donat que $s(t)$ és senar, $a_0 = a_n = 0$.
Calculem b_n :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 8 \sin \frac{\pi n t}{2} dt + \int_2^4 -8 \sin \frac{\pi n t}{2} dt \right) \\
 &= \frac{8}{2} \left(-\cos \frac{\pi n t}{2} \Big|_0^2 + \cos \frac{\pi n t}{2} \Big|_2^4 \right) \cdot \frac{2}{\pi n} \\
 &= \frac{8}{\pi n} \left(-\cos \pi n + 1 + \cos 2\pi n - \cos \pi n \right) \\
 &= \frac{8}{\pi n} \left(2 - 2 \cos \pi n \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ parell} \\ \frac{32}{\pi n} & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Sèrie de Fourier real:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{32}{\pi(2n+1)} \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2}$$

(d) (1 signal $s(t)$ mostregat amb $N=4$ punts en $[0, 4]$ e's :

$$x_0 = s(0) = 8$$

$$x_1 = s(1) = 8$$

$$x_2 = s(2) = -8$$

$$x_3 = s(3) = -8$$

La correspondència D.F.T:

$$\bar{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2i\pi nk}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Calculars:

$$\bar{X}(0) = \sum_{k=0}^3 x_k = 0$$

$$\bar{X}(1) = \sum_{k=0}^3 x_k e^{-\frac{\pi i k}{2}} = 16(1-i)$$

$$\bar{X}(2) = \sum_{k=0}^3 x_k e^{-2(\frac{\pi k}{2})} = 0$$

$$\bar{X}(3) = \overline{\bar{X}(1)} = 16(1+i).$$

⑤ (a) Funció de transferència, si

$$\text{E.D.O és } y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

$$H(\omega) = \frac{(i\omega)^0}{(i\omega)^1 + 2(i\omega)^0} = \frac{1}{i\omega + 2}$$

Resposta impulsiva és l'autotransformada de Fourier de la funció de transferència; per tant cal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = H(\omega)$$

Si resollem la integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} \theta(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_0^{\infty} e^{-t(2+i\omega)} dt \\ &= \frac{e^{-t(2+i\omega)}}{-(2+i\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2+i\omega} \end{aligned}$$

(b) i) Per convolució directa:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-(t-s)} \theta(t-s) e^{-2s} \theta(s) ds \\ &= \begin{cases} t < 0, & y(t) = 0 \\ \int_0^t 2e^{-t} e^{-s} ds = e^{-t} (-2e^{-t} + 2), & t > 0 \end{cases} \\ &= 2e^{-t}(1 - e^{-t}) \theta(t) // \end{aligned}$$

ii)

$$\text{Tenim: } Y(\omega) = U(\omega) \cdot H(\omega)$$

trobem la transformada / Fourier de la senyal d'entrada:

$$\begin{aligned}
 u(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-t} \theta(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} 2e^{-t(1+i\omega)} dt \\
 &= 2 \left. \frac{e^{-t(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{2}{1+i\omega}
 \end{aligned}$$

Per tant, la transformada de Fourier de la funció $y(t)$ és

$$Y(\omega) = u(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{2}{1+i\omega} \cdot \frac{1}{2+i\omega} = \frac{2}{(2-\omega^2)+3i\omega}$$

Per altra banda, a $Y(\omega)$, descomposem en fraccions simples:

$$\frac{2}{(1+i\omega)(2+i\omega)} = \left[\frac{(1)}{(1+i\omega)} + \frac{(-1)}{(2+i\omega)} \right] \cdot 2$$

Per la linealitat de la transformada de Fourier:

$$\frac{1}{1+i\omega} \text{ té antitransformada } e^{-t} \theta(t)$$

$$\frac{1}{2+i\omega} \text{ té " } e^{-2t} \theta(t).$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{2+i\omega} \right) \cdot 2 \text{ té antitransf. } \underline{\underline{2(e^{-t} \theta(t) - e^{-2t} \theta(t))}}$$

o equivalentment: $u(t) = 2e^{-t}(1 - e^{-t})\theta(t) //$

(6) (a) $X = N(0, \sqrt{3})$?, $Y = N(0, 1/\sqrt{3})$?

Ja sabem que X e Y segueixen una distribució normal. Sol cal demostrar que:

$$E(X) = 0, \quad \sigma(X) = \sqrt{3}, \quad E(Y) = 0, \quad \sigma(Y) = 1/\sqrt{3}$$

Sabem $E(Z(t)) = 0 \quad \forall t$, per tant:

$$E(X \cos t + 3Y \sin t) = \cos t E(X) + 3 \sin t E(Y) = 0, \quad \forall t$$

$$\Rightarrow E(X) = E(Y) = 0 //$$

Per un altra part sabem que si $Z(t)$ és un procés estacionari: $\sigma^2(Z(t)) = R_2(0) - E(Z(t))^2$

Troblem $R_2(u)$ a partir de la densitat espectral $G_2(\omega)$:

$$\begin{aligned} R_2(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 3\pi (\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) e^{i\omega u} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} 3\pi (e^{iu} + e^{-iu}) = 3 \cos u. \end{aligned}$$

$$\sigma^2(Z(t)) = R_2(0) - E(Z(t))^2 = 3, \quad \forall t.$$

Per un altra banda,

$$\sigma^2(Z(t)) = \cos^2 t \sigma^2(X) + 9 \sin^2 t \sigma^2(Y), \quad \forall t.$$

En particular,

$$t=0 \rightarrow 3 = \sigma^2(X) //$$

$$t = \pi/2 \rightarrow 3 = 9\sigma^2(Y) \rightarrow \sigma^2(Y) = \frac{1}{3} //$$

(b) $P(Z(\pi) > Z(\pi/2))$

$$Z(\pi) = -X, \quad Z(\pi/2) = 3Y$$

Cal que calculem: $P(-X > 3Y) = P(3Y + X < 0)$

Donat que X e Y son normals independents,

la distribució de $3Y + X$ és una normal

$$N\left(0, \sqrt{3^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2}\right) = N(0, \sqrt{6})$$

$$P(3Y + X < 0) = F_{N(0, \sqrt{6})}(0) = F_{N(0, 1)}(0) = 0.5 //$$

(c)

$$\text{Potència promig de } Z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_Z(\omega) d\omega = R_Z(0)$$

$$\text{Ja hem calculat } R_Z(u) = 3 \cos u$$

$$\rightarrow R_Z(0) = 3 //$$

(d) Sabem: $G_Y(\omega) = G_Z(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$

amb $Y(t)$ procés de sortida.

$$\text{Per tant, } G_Y(\omega) = 3\pi (\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) \cdot \left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2$$

$$\therefore \text{la potència promig} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_Y(\omega) d\omega = 3/4 //$$

(e) Sabem: $E(Y) = E(Z(t))$, $H(0) = 0 //$

Per calcular $R_Y(u)$, autotransformem la densitat espectral $G_Y(\omega)$:

$$R_Y(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_Y(\omega) e^{i\omega u} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 3\pi [\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)] \frac{1}{(1+\omega^2)^2} e^{i\omega u} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} 3\pi \left[\frac{1}{(1+1)^2} e^{iu} + \frac{1}{(1+(-1)^2)^2} e^{-iu} \right]$$

$$= \frac{3}{4} \cos u //$$

(7)

(a) Sabem:

$$\frac{d\phi_x(t)}{dt} \Big|_{t=0} = i E(X)$$

$$\Rightarrow E(X) = (-i (1-it)^{-2} (-1)) \Big|_{t=0} \frac{1}{i} = 1 //$$

Calculeu el moment de segon ordre:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{i^2} \frac{d^2 \phi_x(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{i^2} \left[i (1-2) (1-it)^{-3} (-i) \right] \Big|_{t=0} = 2 \end{aligned}$$

Per tant, $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 //$

(b) Comproveu que amb aquesta funció de densitat, obtenim la funció característica del problema:

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{itx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} e^{itx} dx = \frac{e^{x(-1+it)}}{-1+it} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-it} // \end{aligned}$$

$$(c) P(X \leq 3) = 1 - \int_3^{\infty} f_x(x) dx = 1 - \int_3^{\infty} e^{-x} dx = 1 - e^{-3} //$$

(d) Si X_i és l'error comés en cada peça:Error total = $X_1 + \dots + X_{100}$, Cal calcular:

$P(X_1 + \dots + X_{100} \leq 120)$ i usant Teorema central del límit: (X_i són indep. i amb mateixa esper i variància)

$$P(X_1 + \dots + X_{100} \leq 120) \approx F_{N(100 \cdot \mu, \sqrt{100} \cdot \sigma)}(120)$$

$$P(X_1 + \dots + X_{100} \leq 120) = F_{N(100, 10)}(120) = F_{N(0, 1)}\left(\frac{120 - 100}{10}\right)$$

$$(*) \begin{cases} \mu = E(X_i) = 1 \\ \sigma = \sigma(X_i) = 1 \end{cases} = F_{N(0, 1)}(2) = \underline{\underline{0.97725}}$$

per tant, cometem un error de 0.97725

18a

a) Resolem l'equació usant transformada zeta:

$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = x_n$, al transformar-la obtenim:

$$Y(z) - 5Y(z)z^{-1} + 6Y(z)z^{-2} = X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{X(z)}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6} X(z)$$

trobem $X(z)$:

$$X(z) = \sum_{n \geq 0} 2z^{-n} = 2 \cdot \frac{1}{1 - 1/z} \quad |z| > 1$$

Per tant:

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6} \cdot \frac{2z}{z - 1} = \frac{2z^3}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

Per obtenir y_n , cal antitransformar $Y(z)$.

Per això descomposem en fraccions simples:

$$\frac{2z^3}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} = 2 \left(1 + \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{z-2} \right)$$

$$\text{trobem } A, B, C: \begin{cases} A + B + C = 6 \\ -5A - 3B - 4C = -11 \\ 6A + 2B + 3C = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 11/2, \quad B = \frac{27}{2}, \quad C = -8$$

$$Y(z) = 2 + \frac{1}{z-1} + \frac{27}{z-3} - \frac{16}{z-2}$$

Antitransformem:

$$y_n = 2 \delta(n) + \mathcal{O}(n-1) + 2 \cdot 3^{n-1} \mathcal{O}(n-1) - 16 \cdot 2^{n-1} \mathcal{O}(n-1)$$

$$y_n = 2 \delta(n) + \mathcal{O}(n-1) + 3^{n+2} \mathcal{O}(n-1) - 2^{n+3} \mathcal{O}(n-1)$$

$$y_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 1 + 3^{n+2} - 2^{n+3} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

b) El $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, això té a veure amb

que la funció de Transferència és discreta,

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6} \quad \text{té els pols que no pertanyen}$$

a l'interior del cercle unitat, i per tant és un sistema no estacionari, és a dir, la solució no és mai limitada al llarg del temps.

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Juny 95

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Cal justificar tots els càlculs. Si es fa servir algun resultat obtingut a classe, indiqueu-ho explícitament.
- Les notes sortiran el dia 14 de juny (dimecres) i les revisions seran el dia 19 de juny (dilluns).
- Primer parcial: **problemes 1, 2, 3, 4**; segon parcial: **problemes 5, 6, 7, 8**; examen final: **problemes 3, 4, 5, 6**.

1. Sigui el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = ((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} x, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} y, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} z) + \alpha (e^{-x^2}, \sin y, z^2 + 1).$$

on $n \in \mathbb{Z}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Demostreu que $\vec{F}$ és conservatiu per a tots els valors de α i n . (5 p.)
- (b) Si $\alpha = 0$ calculeu el potencial de $\vec{F}$, tractant el cas $n = -2$ per separat. (10 p.)

(c) Si $\alpha = 0$ i $n = 1995$, calculeu

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

on $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. (10 p.)

2. Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} dz$ en els següents casos, sempre amb orientació antihorària

- (a) C és el quadrat de vèrtexs $-1 - i, -1 + i, -3 + i, -3 - i$.
- (b) C és la circumferència $S(i, \sqrt{3})$.
- (c) C és la circumferència $S(0, \sqrt{2})$. (25 p.)
3. (a) Si $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$, calculeu $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, on S és la superfície formada pel tronc de con $x^2 + y^2 = z^2$ entre $z = 1$ i $z = 2$ junt amb la tapadora inferior $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$. (15 p.)
- (b) Demostreu que:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz = \frac{4\sqrt{7}}{21} \pi$$

(15 p.)

4. Sigui $s(t) = \begin{cases} 8 & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ -8 & \text{si } 2 \leq t < 4 \end{cases}$ extesa amb període $T = 4$ a tota la recta real.

- (a) Dibuixeu la gràfica de l'extensió periòdica a l'interval $[-6, 6]$. (4 p.)
- (b) $s(t)$ és parella, senar, o no té cap tipus de simetria? (2 p.)
- (c) Trobeu la sèrie de Fourier real corresponent al senyal s . (7 p.)
- (d) Mostregeu el senyal $s(t)$ a l'interval $[0, 4]$ amb $N = 4$ punts i calculeu la corresponent DFT. (7 p.)

5. La diferència de potencial $y(t)$ a la sortida d'un circuit vé donada en termes de la diferència de potencial $u(t)$ a l'entrada per l'equació diferencial $y'(t) + 2y(t) = u(t)$.

(a) Trobeu la funció de transferència del sistema i deduiu que la resposta impulsiva és $h(t) = e^{-2t}\theta(t)$ (on $\theta(t)$ representa la funció de Heaviside). (10 p.)

(b) Calculeu la resposta $y(t)$ quan l'entrada és $u(t) = 2e^{-t}\theta(t)$ per dues vies:

i. Per convolució directa.

ii. Utilitzant les propietats de la transformada de Fourier respecte de la convolució. (15 p.)

6. Siguin X , Y variables aleatòries amb distribució normal, independents tals que el procés

$$Z(t) = X \cos t + 3Y \sin t$$

és estacionari amb $E(Z(t)) = 0$ i densitat espectral

$$G_Z(\omega) = 3\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

(a) Demostreu que $X = N(0, \sqrt{3})$ i $Y = N(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. (5 p.)

(b) Calculeu $P(Z(\pi) > Z(\pi/2))$. (5 p.)

(c) Calculeu la potència promig total de $Z(t)$. (5 p.)

(d) Si $Z(t)$ es passa per un filtre amb funció de transferència $H(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$, calculeu la potència promig total del procés de sortida. (5 p.)

(e) Calculeu l'esperança i la funció d'autocorrelació del procés de sortida de l'apartat anterior. (5 p.)

7. Sigui X la variable aleatòria absolutament contínua que ens dona l'error en mm que cometen en mesurar una barra de metall amb un determinat aparell. La funció característica de X és:

$$\phi_X(t) = \frac{1}{1 - it}$$

(a) Trobeu l'esperança i la variància de la variable aleatòria X . (5 p.)

(b) Demostreu que la funció de densitat de la variable aleatòria X és $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ (5 p.)

(c) Calculeu $P(X \leq 3)$. (5 p.)

(d) Siguin 100 barres mesurades de forma independent. Trobeu quina és la probabilitat de que l'error total comés en mesurar les 100 peces no superi els 120 mm. (10 p.)

8. (a) Resoleu l'equació en diferències

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = x_n$$

amb entrada $x_n = 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, i condicions inicials $y_{-1} = 0$, $y_{-2} = 0$. (20 p.)

(b) Què podeu dir de $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$? Quina relació té això amb els pols de la funció de transferència discreta? (5 p.)

① (a)

Cal comprovar que $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ per qualsevol a i n

Noteu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, llavors:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2yz - \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2zy, \\ \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2zx - \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2xz, \\ \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2xy - \frac{n}{2} (r^2)^{n/2-1} 2yx \end{pmatrix}$$

$$= (0, 0, 0) \Rightarrow \vec{F} \text{ és conservatiu.}$$

(b) Si $a=0$, $\begin{cases} \vec{F}(x, y, z) = ((r^2)^{n/2} x, (r^2)^{n/2} y, (r^2)^{n/2} z), n \neq -2 \\ \vec{F}(x, y, z) = (\frac{1}{r} x, \frac{1}{r} y, \frac{1}{r} z) \text{ per } n = -2 \end{cases}$

Cal trobar f camp escalar tq $\text{grad } f = \vec{F}$

• Si $n \neq -2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} y \\ \frac{\partial f}{\partial z} = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} z \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{2(\frac{n}{2} + 1)} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2} + 1} + K.$$

és el potencial

• Si $n = -2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + K$$

és el potencial

(c) Podem usar el teorema de la divergencia, doncs
 V és un sòlid, amb vora $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_S \vec{F} \, d\vec{S}$$

Parametritzem S : trobem el vector normal:

$$S: \begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \varphi & r &= 1 \\ y &= \sin \theta \sin \varphi & \text{amb} & \\ z &= \cos \theta & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ & & 0 &\leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

Vector normal: (Producte vectorial dels vectors tangents)

$$\vec{T}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

$$\vec{T}_\varphi = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\vec{n} = \vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_\varphi = (\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta)$$

$$\iint_S \vec{F} \, d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{F}(x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)) (\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_\varphi) \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) (\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta) \, d\theta \, d\varphi$$

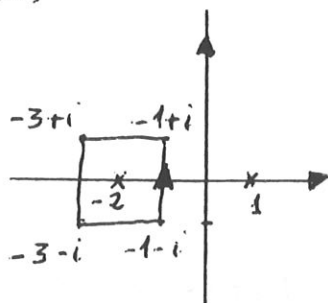
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = -\cos \theta \Big|_0^\pi \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 4\pi //$$

Nota: Es pot calcular la integral $\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$,
directament.

2

(a)



Els pols de $f(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}$ son

$$z = -2 \quad z = 1.$$

Per tant, del residus:

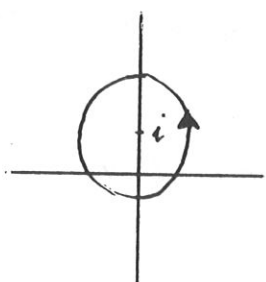
$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -2), \text{ doncs } -2 \in \mathbb{Q}, 1 \notin \mathbb{Q}.$$

$$\operatorname{Res}(f, -2) = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} = -\frac{4}{3}$$

Per tant,

$$\oint_C f(z) dz = -\frac{8\pi i}{3} //$$

(b)



El pol $z = 1 \in S(i, \sqrt{3})$
 $z = -2 \notin S(i, \sqrt{3})$

Per tant,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1)$$

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{3} //$$

(c)



El pol $z = 1 \in S(0, \sqrt{2})$
 $z = -2 \notin S(0, \sqrt{2})$

Per tant,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1) = \frac{2\pi i}{3} //$$

3 a) S és un tronc de con amb vora:

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, z = 2\}$$



Orientem la vora
i apliquem el teorema d'Stokes:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \, d\vec{S} = \int_C \vec{F} \, d\ell$$

Parametritzeu la vora!

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 2 \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

El vector tangent: $\gamma'(\theta) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \, d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2, 2\cos\theta, 2\sin\theta) \cdot (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -4\sin\theta + 4\cos^2\theta \, d\theta \\ &= 4(\cos\theta) \Big|_0^{2\pi} + 4\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Observació: La integral $\iint_S \text{rot } \vec{F} \, d\vec{S}$ es pot resoldre directament, i donat que S pot estar orientada de qualsevol forma, també és vàlid el resultat -4π .

3b Demostreu primer que:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz.$$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx$$

Fem el canvi: $z = e^{ix}$, $dz = iz dx$

$$\cos 2x = \frac{z^2 + 1/z^2}{2} = \frac{z^4 + 1}{2z^2}$$

La vers:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 2 \oint_{S(0,1)} \frac{1}{8 - \frac{z^4 + 1}{2z^2}} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{2}{i} \oint_{S(0,1)} \frac{2z}{+16z^2 - z^4 - 1} dz = 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz.$$

Demostreu la segona qualitat:

$$4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz = \frac{4\sqrt{7}\pi}{21}.$$

Troben els pols de $f(z) = \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1}$ i posteriorment aplicarem el Teorema dels Residus:

Pols: z tals que $z^4 - 16z^2 + 1 = 0$

Resolem l'equació i obtenim: $z = \pm \sqrt{8 \pm 3\sqrt{7}}$

Per aquests quatre uniqueament dos pertanyen al $D(0,1)$: $+\sqrt{8-3\sqrt{7}}$ i $-\sqrt{8-3\sqrt{7}}$.

Calcular els residus en aquests pols d'ordre 1:

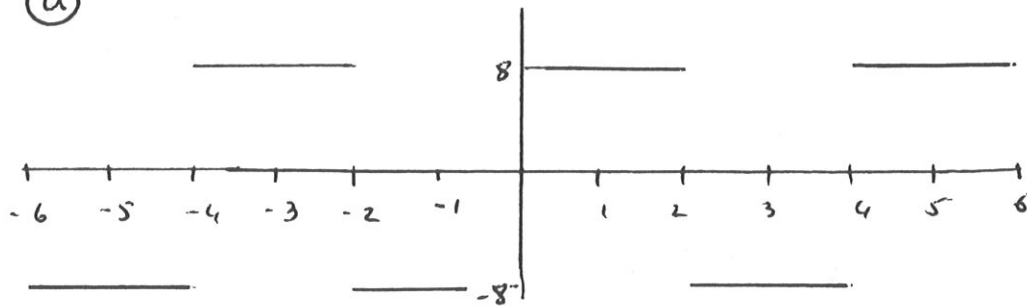
$$\begin{aligned} \text{Res}\left(f, \sqrt{8-3\sqrt{7}}\right) &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{8-3\sqrt{7}}} \frac{(z - \sqrt{8-3\sqrt{7}}) z}{(z - \sqrt{8-3\sqrt{7}})(z + \sqrt{8-3\sqrt{7}})(z^2 - 8 - 3\sqrt{7})} \\ &= \frac{\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{2(\sqrt{8-3\sqrt{7}}) \cdot (-6\sqrt{7})} = \frac{1}{-12\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(f, -\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\sqrt{8-3\sqrt{7}}} (z + \sqrt{8-3\sqrt{7}}) \cdot f(z) = \\ &= \frac{-\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{-2(\sqrt{8-3\sqrt{7}})(-6\sqrt{7})} = \frac{1}{-12\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz &= 4i \left[2\pi i (\text{Res}(f, \sqrt{8-3\sqrt{7}}) + \text{Res}(f, -\sqrt{8-3\sqrt{7}})) \right] \\ &= -8\pi \left(\frac{1}{-12\sqrt{7}} + \frac{1}{-12\sqrt{7}} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{7}} = \frac{4\pi\sqrt{7}}{21} // \end{aligned}$$

4

(a)



(b) $s(t)$ és senar doncs $s(t) = -s(-t)$

(c) Donat que $s(t)$ és senar, $a_0 = a_n = 0$.
Calculem b_n :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 8 \sin \frac{\pi n t}{2} dt + \int_2^4 -8 \sin \frac{\pi n t}{2} dt \right) \\
 &= \frac{8}{2} \left(-\cos \frac{\pi n t}{2} \Big|_0^2 + \cos \frac{\pi n t}{2} \Big|_2^4 \right) \cdot \frac{2}{\pi n} \\
 &= \frac{8}{\pi n} \left(-\cos \pi n + 1 + \cos 2\pi n - \cos \pi n \right) \\
 &= \frac{8}{\pi n} \left(2 - 2 \cos \pi n \right) = \begin{cases} 0 & n \text{ parell} \\ \frac{32}{\pi n} & n \text{ senar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Sèrie de Fourier real:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{32}{\pi(2n+1)} \sin \frac{\pi(2n+1)t}{2}$$

(d) (1 signal $s(t)$ échantillonné avec $N=4$ points en $[0, 4]$ s :

$$x_0 = s(0) = 8$$

$$x_1 = s(1) = 8$$

$$x_2 = s(2) = -8$$

$$x_3 = s(3) = -8$$

La transformée D.F.T. :

$$\bar{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2i\pi nk}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Calculons :

$$\bar{X}(0) = \sum_{k=0}^3 x_k = 0$$

$$\bar{X}(1) = \sum_{k=0}^3 x_k e^{-\frac{\pi i k}{2}} = 16(1-i)$$

$$\bar{X}(2) = \sum_{k=0}^3 x_k e^{-2(\frac{\pi i k}{2})} = 0$$

$$\bar{X}(3) = \overline{\bar{X}(1)} = 16(1+i).$$

$$\bar{X}(n) = 8 \cdot e^0 + 8 e^{-\frac{\pi i}{2}} - 8 e^{-\pi i} - 8 e^{-\frac{3\pi i}{2}}$$

$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ -1 & (-1) & (-1)^3 = +1 & \end{matrix}$

$$e^{-\frac{\pi i k}{2}} = (-i)^k$$

⑤ (a) Funció de transferència, si

$$\text{E.D.O és } y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

$$H(\omega) = \frac{(i\omega)^0}{(i\omega)^1 + 2(i\omega)^0} = \frac{1}{i\omega + 2}$$

Resposta impulsiva és l'autotransformada de Fourier de la funció de transferència; per tant cal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = H(\omega)$$

Si resollem la integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} \theta(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_0^{\infty} e^{-t(2+i\omega)} dt \\ &= \left. \frac{e^{-t(2+i\omega)}}{-(2+i\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2+i\omega} \end{aligned}$$

(b) i) Per convolució directa:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-(t-s)} \theta(t-s) e^{-2s} \theta(s) ds \\ &= \begin{cases} t < 0, & y(t) = 0 \\ \int_0^t 2e^{-t} e^{-s} ds = e^{-t}(-2e^{-t} + 2), & t > 0 \end{cases} \\ &= 2e^{-t}(1 - e^{-t}) \theta(t) // \end{aligned}$$

ii)

$$\text{Tenim: } Y(\omega) = U(\omega) H(\omega)$$

trobem la transformada de Fourier de la senyal d'entrada:

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-t} \theta(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} 2e^{-t(1+i\omega)} dt \\
 &= 2 \left. \frac{e^{-t(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{2}{1+i\omega}
 \end{aligned}$$

Per tant, la transformada de Fourier de la funció $y(t)$ és

$$Y(\omega) = U(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{2}{1+i\omega} \cdot \frac{1}{2+i\omega} = \frac{2}{(2-\omega^2)+3i\omega}$$

Per altra banda, a $Y(\omega)$, descomposem en fraccions simples:

$$\frac{2}{(1+i\omega)(2+i\omega)} = \left[\frac{(1)}{(1+i\omega)} + \frac{(1-i)}{(2+i\omega)} \right] \cdot 2$$

Per la linealitat de la transformada de Fourier:

$$\frac{1}{1+i\omega} \text{ té antitransformada } e^{-t} \theta(t)$$

$$\frac{1}{2+i\omega} \text{ té " " } e^{-2t} \theta(t).$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{2+i\omega} \right) \cdot 2 \text{ té antitransf. } \underline{\underline{2(e^{-t} \theta(t) - e^{-2t} \theta(t))}}$$

o equivalentment: $h(t) = 2e^{-t}(1 - e^{-t})\theta(t) //$

(6)

$$(a) \quad X = N(0, \sqrt{3})?, \quad Y = N(0, 1/\sqrt{3})?$$

Ja sabem que X e Y segueixen una distribució normal. Sol cal demostrar que:

$$E(X) = 0, \quad \sigma(X) = \sqrt{3}, \quad E(Y) = 0, \quad \sigma(Y) = 1/\sqrt{3}$$

Sabem $E(Z(t)) = 0 \quad \forall t$, per tant:

$$E(X \cos t + 3Y \sin t) = \cos t E(X) + 3 \sin t E(Y) = 0, \quad \forall t$$

$$\Rightarrow E(X) = E(Y) = 0 //$$

Per un altra part sabem que si $Z(t)$ és un procés estacionari: $\sigma^2(Z(t)) = R_Z(0) - E(Z(t))^2$

trobem $R_Z(u)$ a partir de la densitat espectral $G_Z(\omega)$:

$$\begin{aligned} R_Z(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 3\pi (\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) e^{i\omega u} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} 3\pi (e^{iu} + e^{-iu}) = 3 \cos u. \end{aligned}$$

$$\sigma^2(Z(t)) = R_Z(0) - E(Z(t))^2 = 3, \quad \forall t.$$

Per un altra banda,

$$\sigma^2(Z(t)) = \cos^2 t \sigma^2(X) + 9 \sin^2 t \sigma^2(Y), \quad \forall t.$$

En particular,

$$t=0 \rightarrow 3 = \sigma^2(X) //$$

$$t=\pi/2 \rightarrow 3 = 9\sigma^2(Y) \rightarrow \sigma^2(Y) = \frac{1}{3} //$$

$$(b) \quad P(Z(\pi) > Z(\pi/2))$$

$$Z(\pi) = -X, \quad Z(\pi/2) = 3Y$$

$$\text{cal que calculem: } P(-X > 3Y) = P(3Y + X < 0)$$

Donat que X e Y son normals independents,

la distribució de $3Y + X$ és una normal
 $N(0, \sqrt{3^2 (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{3})^2}) = N(0, \sqrt{6})$

$$P(3Y + X < 0) = F_{N(0, \sqrt{6})}(0) = F_{N(0, 1)}(0) = 0.5 //$$

(c)

$$\text{Potència promig de } z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_z(\omega) d\omega = R_z(0)$$

$$\text{Ja hem calculat } R_z(u) = 3 \cos u$$

$$\rightarrow R_z(0) = 3 //$$

(d) Sabem: $G_y(\omega) = G_z(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$

amb $Y(t)$ procés de sortida,

$$\text{Per tant, } G_y(\omega) = 3\pi (\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) \cdot \left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2$$

$$\therefore \text{la potència promig} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega) d\omega = 3/4 //$$

(e) Sabem: $E(Y) = E(z(t)), H(0) = 0 //$

Per calcular $R_y(u)$, auto-transformem la densitat espectral $G_y(\omega)$:

$$R_y(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega) e^{i\omega u} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 3\pi [\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)] \frac{1}{(1+\omega^2)^2} e^{i\omega u} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} 3\pi \left[\frac{1}{(1+1)^2} e^{iu} + \frac{1}{(1+(-1)^2)^2} e^{-iu} \right]$$

$$= \frac{3}{4} \cos u //$$

(7) (a) Sabem:

$$\frac{d\phi_x(t)}{dt} \Big|_{t=0} = i E(X)$$

$$\Rightarrow E(X) = (-i (1-it)^{-2} (-1)) \Big|_{t=0} \frac{1}{i} = 1 //$$

Calculeu el moment de segon ordre:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{i^2} \frac{d^2 \phi_x(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{i^2} \left[i(1-2)(1-it)^{-3} (-i) \right] \Big|_{t=0} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Per tant, } \sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 //$$

(b) Comproveu que amb aquesta funció de densitat, obtenim la funció característica del problema:

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{itx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} e^{itx} dx = \frac{e^{x(-1+it)}}{-1+it} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-it} // \end{aligned}$$

$$(c) P(X \leq 3) = 1 - \int_3^{\infty} f_x(x) dx = 1 - \int_3^{\infty} e^{-x} dx = 1 - e^{-3} //$$

(d) Si X_i és l'error comès en cada pega:

Error total = $X_1 + \dots + X_{100}$, Cal calcular:

$P(X_1 + \dots + X_{100} \leq 120)$ i usant Teorema central del límit: (X_i són indep. i amb mateixa Esper i variància)

$$P(X_1 + \dots + X_{100} \leq 120) \approx F_{N(100 \cdot \mu, \sqrt{100 \cdot \sigma})}(120)$$

$$P(X_1 + \dots + X_{100} \leq 120) = F_{N(100, 10)}(120) = F_{N(0, 1)}\left(\frac{120 - 100}{10}\right)$$

$$(*) \begin{cases} \mu = E(X_i) = 1 \\ \sigma = \sigma(X_i) = 1 \end{cases} = F_{N(0, 1)}(2) = \underline{\underline{0.97725}}$$

per tant, cometem un error de 0.97725

8a

a) Resolem l'equació usant transformada zeta:

$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = x_n$, al transformar-la obtenim:

$$Y(z) - 5Y(z)z^{-1} + 6Y(z)z^{-2} = X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{X(z)}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6} X(z)$$

trobem $X(z)$:

$$X(z) = \sum_{n \geq 0} 2z^{-n} = 2 \frac{1}{1 - 1/z} \quad |z| > 1$$

Per tant:

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6} \cdot \frac{2z}{z - 1} = \frac{2z^3}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

Per obtenir y_n , cal autotransformar $Y(z)$.

Per això descomposem en fraccions simples:

$$\frac{2z^3}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} = 2 \left(1 + \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{z-2} \right)$$

$$\text{trobem } A, B, C: \begin{cases} A + B + C = 6 \\ -5A - 3B - 4C = -11 \\ 6A + 2B + 3C = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 1/2, \quad B = \frac{27}{2}, \quad C = -8$$

$$Y(z) = 2 + \frac{1}{z-1} + \frac{27}{z-3} - \frac{16}{z-2}$$

Autotransformem:

$$y_n = 2 \delta(n) + \mathcal{O}(n-1) + 2 \cdot 3^{n-1} \mathcal{O}(n-1) - 16 \cdot 2^{n-1} \mathcal{O}(n-1)$$

$$y_n = 2 \delta(n) + \mathcal{O}(n-1) + 3^{n+2} \mathcal{O}(n-1) - 2^{n+3} \mathcal{O}(n-1)$$

$$y_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 1 + 3^{n+2} - 2^{n+3} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

b) El $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, això té a veure amb

que la funció de Transferència és discreta,

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6} \quad \text{té els pols que no pertanyen}$$

a l'interior del cercle unitat, i per tant és un sistema no estacionari, és a dir, la solució no és manté acotada al llarg del temps.

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Setembre 95

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Cal justificar tots els càlculs. Si es fa servir algun resultat obtingut a classe indiqueu-ho explícitament.
- Primer parcial: problemes 1, 2, 3, 4; segon parcial: problemes 5, 6, 7, 8; examen final: problemes 3, 4, 5, 6.

1. Segui el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{a}x + y + z, x + \frac{1}{a}y + z, x + y + \frac{1}{a}z \right), \quad a > 0$$

i $\vec{G}$ el camp vectorial definit com $\vec{G} = \vec{F} + \text{rot } \vec{F}$. Considereu S , l'esfera de centre l'origen i radi a .

Per quin valor del paràmetre a la integral de $\vec{G}$ sobre S val 4π ?

(20 p.)

2. (a) Segui $f(z)$ una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$, amb derivades enèsimes tals que $f^{(n)}(1) = (-1)^n$. Calculeu

$$\oint_{S(0,2)} \frac{f(z)}{(z-1)^3} dz \quad (15p.)$$

(b) Un senyal discret real $\{x_k, 0 \leq k \leq 7\}$ té transformada discreta de Fourier donada per $\{4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3\}$. Es defineix

$$y_k = \begin{cases} x_{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ és parell,} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad \text{amb } 0 \leq k \leq 15.$$

Calculeu la transformada discreta de $\{y_k\}$. (15 p.)

3. (a) Calculeu, segons els valors d' $a > 0, a \neq 1$, la integral

$$\oint_{S(0,a)} \frac{e^z/z^2}{z^2-1} dz. \quad (15p.)$$

(b) Donat el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + ay^2, y + bz^2, z + cx^2).$$

Es demana:

- Per quins valors dels paràmetres a, b, c reals, el camp $\vec{F}$ és conservatiu i, en aquest cas, trobeu la corresponent funció potencial. (5 p.)
- Si S és la superfície del cilindre $x^2 + y^2 = 4$ limitada pels plans $z = 2$ i $z = -2$, comproveu que la integral

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \, dS$$

no depèn dels valors d' a, b, c i trobeu el seu valor. (10 p.)

4. Segui s el senyal periòdic $s(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) - \sin(\frac{\pi}{2}t)$ a l'interval $[0, 8]$.

- Quin és el període mínim de s ? Es s de banda limitada? (5 p.)
- Trobeu la sèrie de Fourier complexa a $[0, 8]$ i calculeu quin és el mínim nombre parell de punts per tal d'evitar l'*aliasing*. (10 p.)
- Calculeu la DFT. amb $N=16$ punts d'un mostreig a $[0, 8]$ del senyal s . (5 p.)

5. Segui $Z(t) = \frac{1}{T} X(t - T)$, on $X(t)$ és un procés estacionari i $T > 0$.

- Calculeu l'esperança del procés $Z(t)$ en termes de l'esperança del procés $X(t)$. (5 p.)
- Trobeu la relació entre la densitat espectral de $Z(t)$ i de $X(t)$. (10 p.)
- Segui $X(t) = X \cos(t+Y)$ amb X i Y variables aleatòries independents amb distribució uniforme a l'interval $[-\pi, \pi]$. Comproveu que $X(t)$ és estacionari i calculeu la potència promig total de $Z(t)$. (10 p.)

6. Una barreja aleatòria de gasos està formada per oxigen, nitrogen i hidrogen. Seguin X i Y les variables aleatòries que ens donen la porció (en tant per 1) d'oxigen i nitrogen respectivament d'aquesta barreja. La densitat conjunta de (X, Y) és:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, 0 \leq x+y \leq 1, \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

- Dibuixeu el domini pel qual la funció densitat és diferent de zero. (5 p.)
- Demostreu que $k = \frac{e}{e-2}$. (10 p.)

(c) Calculeu la probabilitat de que en la barreja hi hagi més de la meitat d'hidrogen. (5 p.)

(d) Calculeu la probabilitat de que en la barreja hi hagi entre un 10 % i un 20 % de nitrogen. (5 p.)

7. La llargària en mil·límetres d'un cert tipus de cargols ve descrita per una variable aleatòria normal amb esperança 60 mm i desviació típica de 3 mm.

- Quin tant per cent de cargols són més curts de 57 mm? (5 p.)
- D'un grup de 40 cargols, quina és la probabilitat de que n'hi hagi algun més curt de 57 mm? (10 p.)
- D'entre els cargols que se sap superen els 62 mm, quin tant per cent supera els 65 mm? (10 p.)

8. (a) Segui el senyal continu

$$s(t) = \begin{cases} 3^{-t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Discretitzem el senyal $s(t)$ avaluant-lo en els enters. Representeu gràficament el senyal $s(t)$ i el corresponent senyal discretitzat. (5 p.)

(b) Trobeu la resposta al senyal discret $x(k) = 3^{-k}$, $k \geq 0$ obtinguda en passar-la per un sistema amb resposta impulsiva

$$h(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

(10 p.)

(c) Si la resposta impulsiva d'un sistema discret és $h(k) = \frac{3k+2}{3^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, trobeu l'equació en diferències que representa aquest sistema. (10 p.)

- ① Podem usar el teorema de Gauss, agafent
 $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{G} \, dS &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{G} \, dV = \iiint_V \operatorname{div} (\vec{F} + \operatorname{rot} \vec{F}) \, dV \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \frac{3}{a} \iiint_V dV = \frac{3}{a} \cdot (\text{Volum esfera de radi } a) \\ &= \frac{3}{a} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

Imposum $4\pi a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

- ② (a) Usant el Teorema dels Residus:

$$\oint_{S(0,2)} \frac{f(z)}{(z-1)^3} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{f(z)}{(z-1)^3}, 1 \right)$$

calculem aquest residu:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{f(z)}{(z-1)^3}, 1 \right) &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left((z-1)^3 \frac{f(z)}{(z-1)^3} \right) \\ &= \frac{1}{2} f''(1) = 1/2 \end{aligned}$$

Per tant: $\oint_{S(0,2)} \frac{f(z)}{(z-1)^3} \, dz = \pi i$

(2) (b)

Calculen $\{Y_n\}_{0 \leq n \leq 15}$, per definició:

$$Y_n = \sum_{k=0}^{15} y_k e^{-\frac{2\pi i n k}{16}} = \sum_{k=0}^7 y_{2k} e^{-\frac{2\pi i n 2k}{16}} + \sum_{k=0}^7 y_{2k+1} e^{-\frac{2\pi i n (2k+1)}{16}}$$

$$= \sum_{k=0}^7 x_k e^{-\frac{2\pi i n k}{8}} = X_n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

$$Y_8 = \sum_{k=0}^7 x_k e^{-\frac{2\pi i (8)k}{8}} = \sum_{k=0}^7 x_k = X_0$$

$$Y_{16-n} = Y_n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

Per tant,

$$\{Y_n\}_{0 \leq n \leq 15} = \{4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3\}$$

(3) (a) Usant el Teorema dels Residus,

$$\oint_{S(0,a)} \frac{e^z}{z^2(z^2-1)} dz = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2-1)}, 0\right) & \text{si } a < 1 \\ 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2-1)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2-1)}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2-1)}, -1\right) \right) & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Calculen aquests residus:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2-1)}, 0\right) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{e^z}{z^2(z^2-1)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z^2-1-2z)}{(z^2-1)^2} = -$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2-1)}, 1\right) = \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{e^z}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{e}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2-1)}, -1\right) = \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{e^z}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{e^{-1}}{-2}$$

Per tant,

$$\oint_{S(0,a)} \frac{e^z}{z^2(z^2-1)} dz = \begin{cases} -2\pi i & \text{si } a < 1 \\ 2\pi i \left(-1 + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right) & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

(3) (i) Trobem els valors d'a, b i c pels quals $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{rot } \vec{F} = (-2bz, -2cx, -2ay) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{a=b=c=0}$$

Troblem la funció potencial quan $\vec{F}$ és conservatiu:

$$\vec{\nabla} f = \vec{F} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = z$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + K$$

(3) (ii) Parametritzem el cilindre,

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] \times [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\longrightarrow (2\cos\theta, 2\sin\theta, z) \end{aligned}$$

$$T_\theta = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)$$

$$T_z = (0, 0, 1)$$

$$T_\theta \times T_z = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$$

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \, dS = \int_{-2}^2 \int_0^{2\pi} (-2bz, -2c2\cos\theta, -2a2\sin\theta) (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) d\theta dz$$

$$= \int_{-2}^2 \int_0^{2\pi} (-4bz\cos\theta - 8c\cos\theta\sin\theta) d\theta dz$$

$$= \int_{-2}^2 \left(-4bz \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta - 8c \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta d\theta \right) dz = \boxed{0}$$

4) (a)

$$s(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \cos\left(2\pi \frac{1}{4}t\right) - \sin\left(2\pi \frac{1}{4}t\right)$$

Per tant, període mínima de la senyal 4

trobem la sèrie de Fourier a $[0, 8]$,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{8} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{8}$$

Directament, $s(t)$ té sèrie de Fourier

$$(1) \cos \frac{2\pi (2)t}{8} + (-1) \sin \frac{2\pi (2)t}{8}$$

i per tant es de banda limitada, amb coeficients

$$a_2 = 1, \quad b_2 = -1, \quad a_n = 0 \quad \forall n \neq 2, \quad b_n = 0 \quad \forall n \neq 2$$

4) (b) Cal trobar,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{8}}$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \cos \frac{2\pi (2)t}{8} - \sin \frac{2\pi (2)t}{8} = \frac{e^{\frac{2\pi i t}{4}} + e^{-\frac{2\pi i t}{4}}}{2} - \frac{e^{\frac{2\pi i t}{4}} - e^{-\frac{2\pi i t}{4}}}{2i} \\ &= e^{\frac{2\pi i t}{8}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2i} \right) + e^{\frac{2\pi i t}{8}(-2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1+i}{2}, \quad c_{-2} = \frac{1-i}{2}, \quad c_n = 0 \text{ altrament.}}$$

Per tal que no hi hagi aliats, cal que

$$\frac{1}{T_c} < \frac{1}{2\Delta} = \frac{N}{2T} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{N}{16} \Rightarrow \boxed{N > 4}$$

(4) (c)

Per $N=16$ punts no hi ha aliasing,

$$X_n = 16 c_n, \quad 0 \leq n \leq 8$$

$$X_n = 16 c_{n-16}, \quad 9 \leq n \leq 15$$

Clavors,

$$\begin{cases} X_2 = 16 c_2 = 16 \frac{1+i}{2} = \frac{16(1+i)}{2} \\ X_{14} = 16 c_{14-16} = 16 c_{-2} = \frac{16(1-i)}{2} \\ X_n = 0, \quad 0 \leq n \leq 15 \text{ excepte } n=2 \text{ i } n=14. \end{cases}$$

(5) (a)

$$E(z(t)) = E\left(\frac{1}{T} X(t-T)\right) = \frac{1}{T} E(X(t-T))$$

i donat que $X(t)$ es estacionari (té esperança constant),

$$\boxed{E(z(t)) = \frac{1}{T} E(X(t))}.$$

(5) (b) calculeu l'autocorrelació de $z(t)$:

$$R_z(\tau) = E(z(t) \cdot z(t+\tau)) = E\left(\frac{1}{T^2} X(t-T) \cdot X(t-T+\tau)\right)$$

$$= \frac{1}{T^2} E(X(t-T) \cdot X(t-T+\tau))$$

i usant que $X(t)$ és estacionari,

$$R_z(\tau) = \frac{1}{T^2} R_x(\tau)$$

I donat que la densitat espectral es la transformada de l'autocorrelació, tenim:

$$\boxed{G_z(\omega) = \frac{1}{T^2} G_x(\omega)}$$

(5) (c)

• Vergeu que l'esperança és constant,

$$E(X(t)) = E(X \cos(t+Y)) = E(X) \cdot E(\cos(t+Y)) = 0$$

(Hem usat el fet que X e Y indep, i $E(X)=0$)

• Calculeu l'autocorrelació,

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E(X \cos(t+\tau+Y) X \cos(t+Y)) \\ &= E(X^2) \cdot E(\cos(t+\tau+Y) \cdot \cos(t+Y)) \\ &= \frac{\pi^2}{3} \cdot E\left(\frac{\cos(2t+2Y+\tau) + \cos(\tau)}{2}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} \left(E(\cos(2t+2Y+\tau)) + \cos \tau \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{\pi^2}{6} \cos \tau \end{aligned}$$

$\Rightarrow X(t)$ procés estacionari

Calculeu la potència promig:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T^2} G_X(\omega) d\omega$$

$G_X(\omega)$ és la transformada de $R_X(\tau) = \frac{\pi^2}{6} \cos \tau$:

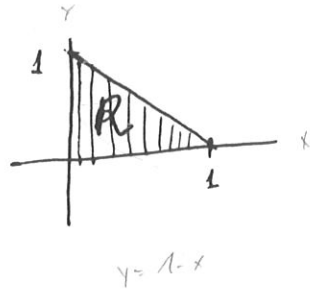
$$G_X(\omega) = \frac{\pi^2}{6} \pi (\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))$$

Per tant,

$$\text{Pot. promig} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^3}{6T^2} (\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) d\omega = \boxed{\frac{\pi^2}{6T^2}}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad E(\cos(2t+2Y+\tau)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t+\tau+2y) \frac{1}{2\pi} dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} (\cos(2t+\tau) \cos 2y - \sin(2t+\tau) \sin 2y) dy = 0. \end{aligned}$$

⑥ (a)



R regió on la funció de densitat és diferent de zero

⑥ (b)

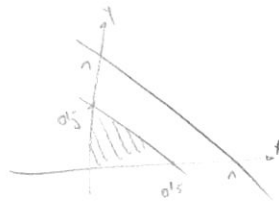
Imposem que: $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1.$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} k e^{-(x+y)} dy dx \\ &= k \int_0^1 e^{-x} (-e^{-(1-x)} + 1) dx = k \int_0^1 (-e^{-1} + e^{-x}) dx \\ &= k (1 - e^{-1} - e^{-1}) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{1 - 2/e} = \boxed{\frac{e}{e-2}} \end{aligned}$$

⑥ (c) Si en la barreja hi ha més de la meitat d'hidrogen, vol dir que d'oxigen i nitrogen n'hi ha menys de la meitat, per tant, cal calcular:

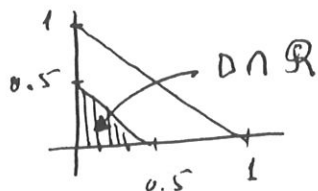
$$P(X+Y < 0.5) = \iint_D f(x,y) dx dy$$

$$\text{on } D = \{(x,y) \mid x+y < 0.5\}$$



$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \iint_{D \cap \mathbb{R}} k e^{-(x+y)} dx dy + 0 \\ &= \int_0^{0.5} \int_0^{0.5-x} k e^{-x} e^{-y} dy dx = \int_0^{0.5} k e^{-x} (-e^{-(0.5-x)} + 1) dx \\ &= k (-x e^{-0.5} - e^{-x}) \Big|_0^{0.5} = k \left(-\frac{1}{2} e^{-1/2} - e^{-1/2} + 1 \right) \\ &= \boxed{\frac{e}{e-2} \left(1 - \frac{3}{2} e^{-1/2} \right)} \end{aligned}$$

Nota: $D \cap R$ é a região representada:



⑥ (d)

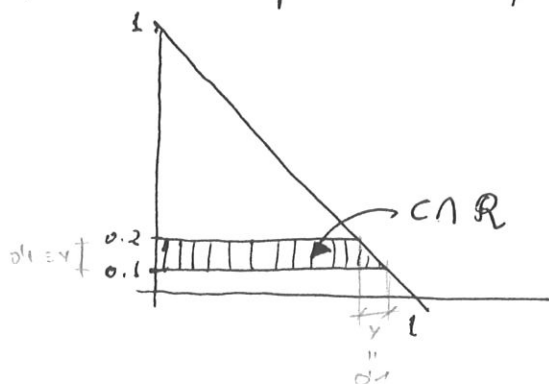
$$P(0.1 \leq Y \leq 0.2, 0 \leq X \leq 1) = \iint_C f_{(X,Y)}(x,y) dx dy$$

$$\text{on } C = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.2\}$$

$$\iint_C f_{(X,Y)}(x,y) dx dy = \iint_{C \cap R} K e^{-x} e^{-y} dx dy$$

$$= \int_{0.1}^{0.2} \int_0^{1-y} K e^{-x} e^{-y} dx dy = \left[\frac{e}{e-2} \left(-\frac{0.1}{e} - e^{-0.2} + e^{-0.1} \right) \right]$$

Nota: $C \cap R$ é representada por:



7 (a)

$$P(X < 57) = F_{N(60,3)}(57) = F_{N(0,1)}\left(\frac{57-60}{3}\right) \\ = F_{N(0,1)}(-1) = 1 - F_{N(0,1)}(1) = 0.1587 = \boxed{15.87\%}$$

7 (b)

Definim Y variable aleatòria que compta el nombre de
cargols més petits que 57 mm

Notem que Y segueix una distribució $B(40, 0.1587)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{40}{0} (0.1587)^0 (1 - 0.1587)^{40} \\ = \boxed{0.999}$$

7 (c)

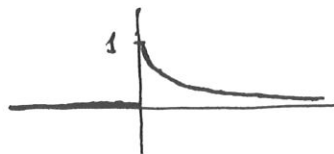
$$P\left(\frac{X > 65}{X > 62}\right) = \frac{P(X > 65 \cap X > 62)}{P(X > 62)} = \frac{P(X > 65)}{P(X > 62)}$$

$$= \frac{1 - F_{N(60,3)}(65)}{1 - F_{N(60,3)}(62)} = \frac{1 - F_{N(0,1)}(5/3)}{1 - F_{N(0,1)}(2/3)}$$

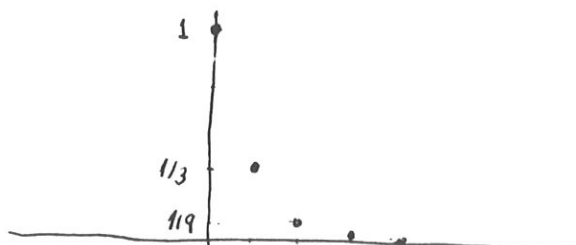
$$= \frac{1 - 0.9525}{1 - 0.7486} = \boxed{0.1889}$$

8 (a)

senyal $s(t)$:



senyal $s(k)$:



8) (b)

Troben la transformada zeta de $x(k)$ i $h(k)$:

$$X(z) = \sum_{k \geq 0} 3^{-k} z^{-k} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{13z} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{3z}} = \frac{3z}{3z-1}$$

$$H(z) = \sum_{k \geq 0} h(k) z^{-k} = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{3z}{3z-1} \cdot \frac{z+1}{z} = \frac{z+1}{z-1/3} = \frac{z}{z-1/3} + \frac{1}{z-1/3}$$

Si autotransformem, troben la senyal de sortida:

$$y(k) = \left(\frac{1}{3} \right)^k \theta(k) + \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \theta(k-1)$$

8) (c)

$$h(k) = \frac{3k+2}{3^k} = k \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^k$$

$$H(z) = \frac{z}{(z-1/3)^2} + 2 \frac{z}{z-1/3} = \frac{2z^2+z/3}{(z-1/3)^2}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{2z^2+z/3}{z^2 - \frac{2}{3}z + 1/9} \cdot X(z)$$

$$\left(z^2 - \frac{2}{3}z + 1/9 \right) Y(z) = (2z^2 + z/3) X(z)$$

Autotransformant, troben l'equació en diferències:

$$y_{k+2} - \frac{2}{3} y_{k+1} + \frac{1}{9} y_k = 2 x_{k+2} + \frac{1}{3} x_{k+1}$$

és a dir,

$$y_k - \frac{2}{3} y_{k-1} + \frac{1}{9} y_{k-2} = 2 x_k + \frac{1}{3} x_{k-1}$$

Examen d'AMAE d'ETT.

EUPVG, 13 Febrer 96

- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Cal justificar tots els càlculs.
- Les notes sortiran el dia 20 de febrer (dimarts) i les revisions seran el dia 23 de febrer (divendres).

1. Siguin els senyals $f(t) = \sin t$ i $g(t) = \sin 8t$, tots dos definits a $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) (10 p) Calculeu la sèrie de Fourier complexa de l'extensió periòdica de f amb període $\frac{\pi}{2}$.

(b) (5 p) Feu el mateix per a l'extensió periòdica de g , també amb període $\frac{\pi}{2}$.

(c) (8 p) Quin nombre mínim de punts ha de contenir el mostreig de $g(t)$ a l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ si no volem tenir *aliasing* en calcular la corresponent DFT?

(d) (7 p) Calculeu la transformada discreta de Fourier d'un mostreig de g a $[0, \frac{\pi}{2}]$ amb $N = 4$ i $N = 6$ punts, respectivament.

(e) (5 p) Si fem un mostreig del senyal $f(t) + g(t)$ a l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ amb $N = 8$ punts, es produirà *aliasing* en el càlcul de la corresponent DFT?

215.

2. (a) Trobeu les singularitats, digueu de quin tipus són i calculeu els corresponents residus per les següents funcions de variable complexa

i. $f(z) = \cos \frac{1}{z}$. (10 p)

ii. $g(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)}$. (10 p)

(b) (10 p) Calculeu $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}$.

3. Per cada paràmetre $a \in \mathbb{R}$, definim el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}_a(x, y, z) = ((a + xyz)e^{xyz}, x^2ze^{xyz}, x^2ye^{xyz}).$$

(a) (10 p) Demostreu que el camp $\vec{F}_a$ és conservatiu només per $a = 1$ i, en aquest cas, trobeu la corresponent funció potencial.

(b) (10 p) Per $a = 1$, considereu el camp $\vec{F}_1$ com un camp de forces que actua sobre una partícula. Quina condició ha de complir un punt $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ perquè el treball realitzat per $\vec{F}_1$ en desplaçar aquesta partícula des de l'origen fins el punt P , sigui zero?

(c) (15 p) Si S és la superfície semiesfèrica $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ i

$$\vec{F}_0(x, y, z) = (xyz e^{xyz}, x^2 z e^{xyz}, x^2 y e^{xyz}).$$

Calculeu

$$\int_S \text{rot} \vec{F}_0 \cdot d\vec{S}$$

13 de febrer 1996.

① $f(t) = \sin t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$g(t) = \sin 8t$

a) Sèrie de Fourier complexa de l'extensió periòdica de f amb període $\frac{\pi}{2}$.

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{\pi/2}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{4i n t}.$$

$$c_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot e^{-4i n t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) e^{-4i n t} dt$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{(1-4n)t} - e^{-(1+4n)t} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \left[\frac{e^{(1-4n)t}}{(1-4n)i} + \frac{e^{-(1+4n)t}}{(1+4n)i} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \cdot 2 \left(\frac{e^{\frac{(1-4n)\pi}{2}i}}{(1-4n)} + \frac{e^{-\frac{(1+4n)\pi}{2}i}}{(1+4n)} - \frac{1}{(1-4n)} - \frac{1}{(1+4n)} \right)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{i}{1-4n} - \frac{i}{1+4n} - \frac{2}{1-16n^2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2-8ni}{1-16n^2}$$

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2-8ni}{1-16n^2} e^{4i n t} \quad (f \text{ no és de banda limitada})$$

b) Sèrie de Fourier complexa de l'extensió periòdica de g amb període $\frac{\pi}{2}$.

$$g(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{4i n t}$$

$$\sin 8t = \frac{e^{8ti} - e^{-8ti}}{2i} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{4i n t}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{2i}, \quad c_{-2} = -\frac{1}{2i}$$

(g és de banda limitada).

$$c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{\pm 2\}.$$

c) Sigui f_c la freqüència crítica de g .

$$f_c = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

Si N és el nombre de punts amb què fem el mostreig, cal que

$$\frac{4}{\pi} < \frac{1}{2 \cdot \Delta}$$

$$\text{on } \Delta^{-1} = \frac{N}{T} = \frac{N}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2N}{\pi}$$

$$\frac{4}{\pi} < \frac{2N}{2\pi} \Rightarrow N > 4 \Rightarrow \text{nombre mínim de punts ha de ser } N=6.$$

d) - D.F.T d'un mostreig de g amb $N=4$ punts.

Si $N=4$, hi ha "aliasing", per tant, els coeficients de la DFT verifiquen que

$$\underline{X}_n = 4 \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_{n+r \cdot 4}$$

$$0 \leq n \leq 3$$

Amb la qual cosa

$$\underline{X}_0 = 4 \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_{4r} = 0$$

$$\underline{X}_1 = 4 \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_{4r+1} = 0$$

$$\underline{X}_2 = 4 \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_{4r+2} = 4(c_2 + c_{-2}) = 0$$

$$\underline{X}_3 = 4 \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_{4r+3} = 0$$

- D.F.T d'un mostreig de g amb $N=6$ punts.

Si $N=6$, no hi ha "aliasing", per tant, podem calcular els coeficients de la DFT com:

$$\underline{X}_n = 6 \cdot c_n, \quad 0 \leq n \leq 3,$$

$$\underline{X}_n = 6 \cdot c_{6+n}, \quad 4 \leq n \leq 5.$$

$$\text{Per tant } \underline{X}_0 = 0, \quad \underline{X}_1 = 0, \quad \underline{X}_2 = 6c_2 = \frac{6}{2i} = -3i$$

$$\underline{X}_3 = 0, \quad \underline{X}_4 = 6c_{-2} = -\frac{6}{2i} = 3i, \quad \underline{X}_5 = 0.$$

c) f no és de banda limitada, per tant, tampoc $f(t) + g(t)$.
 Com a conseqüència, es té que per cap valor de N podem evitar
 l'"aliasing" fent un mostreig de $f+g$ i calculant la corresponent
 D.F.T

(2) a)

i) Singularitats i residus de $f(z) = \cos \frac{1}{z}$.

La única singularitat de f és essencial i es troba al punt $z=0$.
 Per calcular-la, obtindrem, en primer lloc el desenvolupament de Laurent
 en un entorn de $z=0$.

Utilitzant que (P.5 apartat f) Tema 3)

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} (-1)^n, \text{ obtenim que}$$

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)^{-2n} (-1)^n}{(2n)!}$$

D'aquí dedim que el coeficient que multiplica a z^{-1} en aquest desen-
 volupament és 0 (donat que les potències de z que hi apareixen són nom-
 bres parells negatius). És a dir, que

$$\boxed{\text{Res}(f, 0) = 0.}$$

ii) Singularitats i residus de $g(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$

les singularitats són $z \in \mathbb{C}$, tals que:

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm i \quad \text{pols d'ordre 2}$$

$$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 2i \quad \text{pols d'ordre 1.}$$

$$\text{Res}(g, \pm i) = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{d}{dz} \left((z \mp i)^2 \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2(z+2i)(z-2i)} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z \pm i)^2(z^2+4)} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \pm i} - \frac{[2(z \pm i)(z^2 + 4) + (z \pm i)^2 2z]}{(z \pm i)^4 (z^2 + 4)^2} =$$

$$= -2 \frac{[\pm 6i \mp 4i]}{16 \cdot 9} = \begin{cases} -\frac{2i}{72} = -\frac{1}{36}i \\ \frac{2i}{72} = \frac{1}{36}i \end{cases}$$

$$\text{Res}(g, \pm 2i) = \lim_{z \rightarrow \pm 2i} (z \mp 2i) \frac{1}{(z^2 + 1)^2 (z + 2i)(z - 2i)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \pm 2i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2 (z \pm 2i)} = \begin{cases} -\frac{i}{36} \\ \frac{i}{36} \end{cases}$$

En resum, $\text{Res}(g, i) = -\frac{i}{36}$, $\text{Res}(g, -i) = \frac{i}{36}$.

$\text{Res}(g, 2i) = -\frac{i}{36}$, $\text{Res}(g, -2i) = \frac{i}{36}$.

b) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)}$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)} \stackrel{\text{f. parella}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum \text{Res}(g, a_i)$$

on la suma anterior s'extén pels pols a_i de la funció $g(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 4)}$ que tenen $\text{Im } a_i > 0$. D'aquí,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)} = \pi i [\text{Res}(g, i) + \text{Res}(g, 2i)]$$

$$= \pi i \left[-\frac{i}{36} + \frac{i}{36} \right] = \boxed{\frac{\pi}{18}}$$

③ Per cada $a \in \mathbb{R}$, definim.

$$\vec{F}_a = ((a + xyz)e^{xyz}, x^2z e^{xyz}, x^2y e^{xyz}).$$

a) Demostreu que $\vec{F}_a$ és conservatiu només per $a = 1$.

$$\vec{F}_a \text{ conservatiu} \Leftrightarrow \text{rot } \vec{F}_a = \vec{0}$$

$$\text{rot } \vec{F}_a = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (a+xyz)e^{xyz} & x^2z e^{xyz} & x^2y e^{xyz} \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2 e^{xyz} + x^3 y z e^{xyz} - x^2 e^{xyz} - x^3 y z e^{xyz}) \vec{i}$$

$$+ (xy e^{xyz} + (a+xyz)xy e^{xyz} - 2xy e^{xyz} - x^2 y^2 z e^{xyz}) \vec{j}$$

$$+ (2xz e^{xyz} + x^2 y z^2 e^{xyz} - xz e^{xyz} - (a+xyz)e^{xyz} xz) \vec{k}$$

$$= 0 \vec{i} + [(a-1)xy e^{xyz}] \vec{j} + [(1-a)xz e^{xyz}] \vec{k} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)xy e^{xyz} = 0 \\ (1-a)xz e^{xyz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\text{Si } a = 1, \vec{F}_1 = (\overset{F_1(x,y,z)}{(1+xyz)e^{xyz}}, \overset{F_2(x,y,z)}{x^2z e^{xyz}}, \overset{F_3(x,y,z)}{x^2y e^{xyz}})$$

és conservatiu per tant, podem trobar el potencial com

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,0,0) dt + \int_0^y F_2(x,t,0) dt + \int_0^z F_3(x,y,t) dt$$

$$= \int_0^x 1 dt + \int_0^y 0 dt + \int_0^z x^2 y e^{xyt} dt =$$

$$= x + \left[x^2 y \frac{e^{xyt}}{xy} \right]_{t=0}^z = x + [x \cdot e^{xyz} - x] =$$

$$= x \cdot e^{xyz}.$$

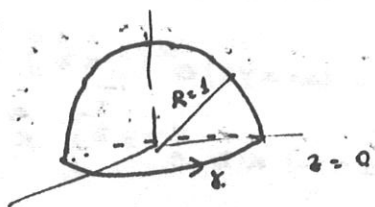
$$b) \int_{(0,0,0)}^{(x_0, y_0, z_0)} (1 + xyz) e^{xyz}, x^2 z e^{xyz}, x^2 y e^{xyz} d\gamma =$$

$$T. \text{ del gradient } \Rightarrow f(x_0, y_0, z_0) - f(0, 0, 0) = x_0 e^{x_0 y_0 z_0} - 0 \cdot e^{0 \cdot 0 \cdot 0} = x_0 e^{x_0 y_0 z_0} = 0$$

$$c) \text{ Si } S \text{ es } x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0.$$

$$\vec{F}_0(x, y, z) = (xyz e^{xyz}, x^2 z e^{xyz}, x^2 y e^{xyz}).$$

$$\text{Calcular } \iint_S \text{rot } \vec{F}_0 \cdot d\vec{S} \stackrel{T. \text{ de Stokes}}{=} \int_\gamma \vec{F}_0 \cdot d\gamma$$



$$\gamma(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\gamma'(\varphi) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F}_0 d\gamma &= \int_0^{2\pi} \vec{F}_0(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 0, \cos^2 \varphi \sin \varphi) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) d\varphi = \boxed{0} \end{aligned}$$

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Febrer 95

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Les notes sortiran el dia 15 de febrer (dimecres) i les revisions seran el dia 17 de febrer (divendres).

- (a) Calculeu el treball realitzat per la força:

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, e^z)$$

sobre una partícula que es mou per la corba d'equació $\{x^2 + y^2 x^3 = 1, z = 0\}$ entre els punts $(-1, 0, 0)$ i $(1, 0, 0)$. (10 p.)

- Sigueu S la superfície $z = e^{x^2+y^2}$, entre els plans $z = 1$ i $z = 2$. Calculeu

$$\int_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{on} \quad \vec{F}(x, y, z) = (2y, z, y) \quad (20\text{p.})$$

Indicació: per la parametrització de S o de la seva vora, preneu a x i y coordenades polars.

$$2. \text{ Sigueu } f(z) = \frac{e^{i\sqrt{7}z}}{(z^2 + 4)^2}$$

- Calculeu tots els pols de $f(z)$, els seus ordres i els seus residus. (15 p.)

- Demostreu que

$$\int_0^\infty \frac{\cos \sqrt{7}x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi(1 + 2\sqrt{7})}{32} e^{-2\sqrt{7}}. \quad (15 \text{ p.})$$

- Sigueu $s(t)$ un senyal periòdic de període 2π , que a l'interval $[-\pi, \pi]$ està definit per

$$s(t) = \begin{cases} -t & \text{si } -\pi \leq t \leq 0, \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

- Dibuixeu la gràfica de s a l'interval $[-5\pi, 5\pi]$. (5 p.)
- Trobeu les sèries de Fourier complexa i real de $s(t)$. (12 p.)
- Utilitzeu l'apartat (b) per deduir el valor de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \quad (3 \text{ p.})$$

- (a) Sigueu $s(t)$ l'extensió periòdica de $\sin(2\pi t) + \frac{1}{3} \cos(\frac{25\pi}{3}t)$ a l'interval $[0, 6]$. Calculeu el mínim nombre parell de punts amb què s'ha de fer el mostreig de s a $[0, 6]$ per tal d'evitar l'*aliasing*. (10 p.)
(b) Sigueu $\{x_k\}$, $k = 0, \dots, 7$ un senyal discret amb DFT en 8 punts $\{X_n\}_{0 \leq n \leq 7} = \{0, 2, 3 - i, 6, 5, 6, 3 + i, 2\}$. Sigueu $\{y_l\}$, $l = 0, \dots, 15$ el senyal discret obtingut a partir de $\{x_k\}$ afegint-hi 8 zeros al final, és a dir

$$y_l = \begin{cases} x_l & \text{si } l = 0, \dots, 7, \\ 0 & \text{si } l = 8, \dots, 15 \end{cases}$$

Calculeu Y_2 i Y_{12} (coeficients de la DFT de $\{y_l\}$). (10 p.)

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Juny 95

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Cal justificar tots els càlculs. Si es fa servir algun resultat obtingut a classe, indiqueu-ho explícitament.
- Les notes sortiran el dia 14 de juny (dimecres) i les revisions seran el dia 19 de juny (dilluns).
- Primer parcial: **problemes 1, 2, 3, 4**; segon parcial: **problemes 5, 6, 7, 8**; examen final: **problemes 3, 4, 5, 6**.

1. Sigui el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = ((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} x, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} y, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} z) + \alpha (e^{-x^2}, \sin y, z^2 + 1).$$

on $n \in \mathbb{Z}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Demostreu que $\vec{F}$ és conservatiu per a tots els valors de α i n . (5 p.)
- (b) Si $\alpha = 0$ calculeu el potencial de $\vec{F}$, tractant el cas $n = -2$ per separat. (10 p.)

(c) Si $\alpha = 0$ i $n = 1995$, calculeu

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

on $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. (10 p.)

2. Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} dz$ en els següents casos, sempre amb orientació antihorària

- (a) C és el quadrat de vèrtexs $-1 - i, -1 + i, -3 + i, -3 - i$.
- (b) C és la circumferència $S(i, \sqrt{3})$.
- (c) C és la circumferència $S(0, \sqrt{2})$. (25 p.)

3. (a) Si $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$, calculeu $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, on S és la superfície formada pel tronc de con $x^2 + y^2 = z^2$ entre $z = 1$ i $z = 2$ junt amb la tapadora inferior $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$. (15 p.)

(b) Demostreu que:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{8 - \cos 2x} dx = 4i \oint_{S(0,1)} \frac{z}{z^4 - 16z^2 + 1} dz = \frac{4\sqrt{7}}{21} \pi$$

(15 p.)

4. Sigui $s(t) = \begin{cases} 8 & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ -8 & \text{si } 2 \leq t < 4 \end{cases}$ extesa amb període $T = 4$ a tota la recta real.

(a) Dibuixeu la gràfica de l'extensió periòdica a l'interval $[-6, 6]$.

(4 p.)

(b) $s(t)$ és parella, senar, o no té cap tipus de simetria? (2 p.)

(c) Trobeu la sèrie de Fourier real corresponent al senyal s . (7 p.)

(d) Mostregeu el senyal $s(t)$ a l'interval $[0, 4]$ amb $N = 4$ punts i calculeu la corresponent DFT. (7 p.)

5. La diferència de potencial $y(t)$ a la sortida d'un circuit ve donada en termes de la diferència de potencial $u(t)$ a l'entrada per l'equació diferencial $y'(t) + 2y(t) = u(t)$.

- (a) Trobeu la funció de transferència del sistema i dediu que la resposta impulsiva és $h(t) = e^{-2t}\theta(t)$ (on $\theta(t)$ representa la funció de Heaviside). (10 p.)
- (b) Calculeu la resposta $y(t)$ quan l'entrada és $u(t) = 2e^{-t}\theta(t)$ per dues vies:
 - i. Per convolució directa.
 - ii. Utilitzant les propietats de la transformada de Fourier respecte de la convolució. (15 p.)

6. Siguin X, Y variables aleatòries amb distribució normal, independents tals que el procés

$$Z(t) = X \cos t + 3Y \sin t$$

és estacionari amb $E(Z(t)) = 0$ i densitat espectral

$$G_Z(\omega) = 3\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

- (a) Demostreu que $X = N(0, \sqrt{3})$ i $Y = N(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. (5 p.)
- (b) Calculeu $P(Z(\pi) > Z(\pi/2))$. (5 p.)
- (c) Calculeu la potència promig total de $Z(t)$. (5 p.)
- (d) Si $Z(t)$ es passa per un filtre amb funció de transferència $H(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$, calculeu la potència promig total del procés de sortida. (5 p.)
- (e) Calculeu l'esperança i la funció d'autocorrelació del procés de sortida de l'apartat anterior. (5 p.)

7. Sigui X la variable aleatòria absolutament contínua que ens dona l'error en mm que cometem en mesurar una barra de metall amb un determinat aparell. La funció característica de X és:

$$\phi_X(t) = \frac{1}{1 - it}$$

- (a) Trobeu l'esperança i la variància de la variable aleatòria X . (5 p.)
- (b) Demostreu que la funció de densitat de la variable aleatòria X és $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ (5 p.)
- (c) Calculeu $P(X \leq 3)$. (5 p.)
- (d) Siguin 100 barres mesurades de forma independent. Trobeu quina és la probabilitat de que l'error total comés en mesurar les 100 peces no superi els 120 mm. (10 p.)

8. (a) Resolcu l'equació en diferències

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = x_n$$

amb entrada $x_n = 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, i condicions inicials $y_{-1} = 0$, $y_{-2} = 0$. (20 p.)

- (b) Què podeu dir de $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$? Quina relació té això amb els pols de la funció de transferència discreta? (5 p.)

Examen d'AMAE d'ETT

EUPVG Setembre 95

- Cada problema val els punts que s'indiquen, i el total es normalitza a 10.
- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Cal justificar tots els càlculs. Si es fa servir algun resultat obtingut a classe, indiqueu-ho explícitament.
- Primer parcial: problemes 1, 2, 3, 4; segon parcial: problemes 5, 6, 7, 8; examen final: problemes 3, 4, 5, 6.

1. Sigui el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{a}x + y + z, x + \frac{1}{a}y + z, x + y + \frac{1}{a}z \right), \quad a > 0$$

i $\vec{G}$ el camp vectorial definit com $\vec{G} = \vec{F} + \text{rot } \vec{F}$. Considereu S , l'esfera de centre l'origen i radi a .

Per quin valor del paràmetre a la integral de $\vec{G}$ sobre S val 4π ?

(20 p.)

2. (a) Sigui $f(z)$ una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$, amb derivades enèsimes tals que $f^{(n)}(1) = (-1)^n$. Calculeu

$$\oint_{S(0,2)} \frac{f(z)}{(z-1)^3} dz \quad (15\text{p.})$$

(b) Un senyal discret real $\{x_k, 0 \leq k \leq 7\}$ té transformada discreta de Fourier donada per $\{4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3\}$. Es defineix

$$y_k = \begin{cases} x_{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ és parell,} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad \text{amb } 0 \leq k \leq 15.$$

Calculeu la transformada discreta de $\{y_k\}$. (15 p.)

3. (a) Calculeu, segons els valors d' $a > 0, a \neq 1$, la integral

$$\oint_{S(0,a)} \frac{e^z/z^2}{z^2-1} dz. \quad (15\text{p.})$$

(b) Donat el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + ay^2, y + bz^2, z + cx^2).$$

Es demana:

- Per quins valors dels paràmetres a, b, c reals, el camp $\vec{F}$ és conservatiu i, en aquest cas, trobeu la corresponent funció potencial. (5 p.)
- Si S és la superfície del cilindre $x^2 + y^2 = 4$ limitada pels plans $z = 2$ i $z = -2$, comproveu que la integral

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \, dS$$

no depèn dels valors d' a, b, c i trobeu el seu valor. (10 p.)

* 4. Sigui s el senyal periòdic $s(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) - \sin(\frac{\pi}{2}t)$ a l'interval $[0, 8]$.

- Quin és el període mínim de s ? Es s de banda limitada? (5 p.)
- Trobeu la sèrie de Fourier complexa a $[0, 8]$ i calculeu quin és el mínim nombre parell de punts per tal d'evitar l'*aliasing*. (10 p.)
- Calculeu la DFT. amb $N=16$ punts d'un mostreig a $[0, 8]$ del senyal s . (5 p.)

* 5. Sigui $Z(t) = \frac{1}{T}X(t - T)$, on $X(t)$ és un procés estacionari i $T > 0$.

- Calculeu l'esperança del procés $Z(t)$ en termes de l'esperança del procés $X(t)$. (5 p.)
- Trobeu la relació entre la densitat espectral de $Z(t)$ i de $X(t)$. (10 p.)
- Sigui $X(t) = X \cos(t+Y)$ amb X i Y variables aleatòries independents amb distribució uniforme a l'interval $[-\pi, \pi]$. Comproveu que $X(t)$ és estacionari i calculeu la potència promig total de $Z(t)$. (10 p.)

* 6. Una barreja aleatòria de gasos està formada per oxigen, nitrogen i hidrogen. Siguen X i Y les variables aleatòries que ens donen la proporció (en tant per 1) d'oxigen i nitrogen respectivament d'aquesta barreja. La densitat conjunta de (X, Y) és:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, 0 \leq x+y \leq 1, \\ 0 & \text{altrement} \end{cases}$$

- Dibuixeu el domini pel qual la funció densitat és diferent de zero. (5 p.)
- Demostreu que $k = \frac{e}{e-2}$. (10 p.)

(c) Calculeu la probabilitat de que en la barreja hi hagi més de la meitat d'hidrogen. (5 p.)

(d) Calculeu la probabilitat de que en la barreja hi hagi entre un 10 % i un 20 % de nitrogen. (5 p.)

7. La llargària en mil·límetres d'un cert tipus de cargols ve descrita per una variable aleatòria normal amb esperança 60 mm i desviació típica de 3 mm.

- Quin tant per cent de cargols són més curts de 57 mm? (5 p.)
- D'un grup de 40 cargols, quina és la probabilitat de que n'hi hagi algun més curt de 57 mm? (10 p.)
- D'entre els cargols que se sap superen els 62 mm, quin tant per cent supera els 65 mm? (10 p.)

8. (a) Sigui el senyal continu

$$s(t) = \begin{cases} 3^{-t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{altrement.} \end{cases}$$

Discretitzem el senyal $s(t)$ avaluant-lo en els enters. Representeu gràficament el senyal $s(t)$ i el corresponent senyal discretitzat.

(5 p.)

(b) Trobeu la resposta al senyal discret $x(k) = 3^{-k}$, $k \geq 0$ obtinguda en passar-la per un sistema amb resposta impulsiva

$$h(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

(10 p.)

(c) Si la resposta impulsiva d'un sistema discret és $h(k) = \frac{3k+2}{3^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, trobeu l'equació en diferències que representa aquest sistema. (10 p.)

Examen d'AMAE. ETT.

EUPVG, 14 Juny 96

- No poseu dos problemes en un mateix full.
- Cal justificar tots els càlculs.
- Les notes sortiran el dia 26 de juny (dimecres) i les revisions seran el dia 1 de juliol (dilluns).
- Examen Final: problemes 3, 4, 5 i 6. Primer Parcial: problemes 1, 2 i 3. Segon Parcial: problemes 6, 7 i 8.

- (a) Calculeu, aplicant les fórmules derivades del teorema de Green, l'àrea de la regió tancada per la corba anomenada cardiode, la qual admet la parametrització per $a > 0$

$$x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (15\text{pt.})$$

- (b) Sigui $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z\gamma + 1}$, $0 < \gamma < 1$. Trobeu els pols de $f(z)$ i demostreu que són complexos de mòdul 1. (10 pt.)

$$(c) \text{ Calculeu } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{bx^2 + 2ax + b} dx, \text{ on } 0 < a < b. \quad (10 \text{ pt.})$$

Ind. Utilitzeu l'apartat anterior amb $\gamma = a/b$.

- Donada la funció $s(t) = |1 - t|$ per $t \in [0, 2]$ i extesa periòdicament amb període 2 a tota la recta, es demana:

- Dibuixeu la gràfica de l'extensió periòdica de s a l'interval $[-1, 3]$.
¿Té algun tipus de paritat l'extensió periòdica? (5 pt.)

- Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier complexa de s . (15 pt.)

- ¿Es s una funció de banda limitada? ¿Hi haurà *aliasing* si es calcula la DFT d'un mostreig de s a l'interval $[0, 2]$ amb $N = 1996$ punts? (5 pt.)

- Calculeu el mostreig de s a l'interval $[0, 2]$ amb $N = 4$ punts equiespaiats i trobeu la corresponent DFT del senyal mostrejat. (10 pt.)

- (a) Si S és la superfície del paraboloide $x^2 + y^2 = z$, $0 \leq z \leq 4$ tancada pel disc $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 4$. Calculeu la integral de superfície

$$\int_S (3x^2, xy, z) dS. \quad (15\text{pt.})$$

- Sigui $a > 0$, $a \neq 1$ i γ la corba tancada formada per la unió dels segments $\gamma_1 = \{x + y = a, 0 \leq x \leq a\}$, $\gamma_2 = \{y - x = a, -a \leq x \leq 0\}$ i $\gamma_3 = \{y = 0, -a \leq x \leq a\}$, recorreguda en sentit antihorari. Demostreu que:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{z\pi/2}}{z^2 + 1} dz = \begin{cases} \pi i & \text{si } a > 1; \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases} \quad (15\text{pt.})$$

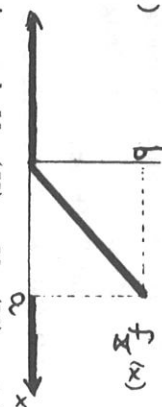
- Donada la funció $s(t) = |1 - t|$ per $t \in [0, 2]$ i extesa periòdicament amb període 2 a tota la recta, es demana:

- Dibuixeu la gràfica de l'extensió periòdica de s a l'interval $[-1, 3]$.
¿Té algun tipus de paritat l'extensió periòdica? (5 pt.)

- Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier complexa de s . (10 pt.)

- ¿Es s una funció de banda limitada? ¿Hi haurà *aliasing* si es calcula la DFT d'un mostreig de s a l'interval $[0, 2]$ amb $N = 1996$ punts? (5 pt.)

5. (a) Trobeu la condició sobre els paràmetres positius a i b per tal que la funció f_X de la gràfica representi la funció de densitat d'una variable aleatòria X . (5 pt.)



- (b) Si X, Y són variables aleatòries amb $Var(X) = Var(Y) = 4$ i tals que la variable aleatòria suma $Z = X + Y$ té per densitat

$$f_Z(z) = \begin{cases} kz & \text{si } 0 \leq z \leq 6; \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

- Calculeu $E(Z)$, $P(Z \geq 1)$ i $P(Z \leq 1 | Z \geq 1/2)$. (10 pt.)
- Calculeu $Var(Z)$ i raoneu que X i Y no són independents. (5 pt.)

- * 6. (a) Un sistema lineal invariant en el temps té per resposta impulsiva

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}(\delta(t+2\pi) + \delta(t-2\pi)).$$

Calculeu la funció de transferència del sistema $H(\omega)$, i comproveu que es verifica $|H(\omega)|^2 = 4 \cos^4 \pi \omega$. (10 pt.)

- (b) Demostreu que les respostes del sistema de l'apartat anterior a entrades $g_1(t) = \cos t$ i $g_2(t) = \sin t$ són, respectivament, $\mathcal{H}_{g_1}(t) = 2 \cos t$ i $\mathcal{H}_{g_2}(t) = 2 \sin t$. (5 pt.)

- (c) Siguin X, Y variables aleatòries independents amb distribució uniforme a $[-\pi, \pi]$.

Definim el procés $Z(t) = \cos(X+t) + \cos(Y+t)$. Demostreu que $Z(t)$ és un procés estacionari amb funció d'autocorrelació $R_Z(\tau) = \cos(\tau)$. (10 pt.)

- (d) Es passa el procés $Z(t)$ pel sistema de l'apartat (a), calculeu l'esperança i densitat espectral del procés de sortida $W(t)$. (5 pt.)

- * 7. (a) Trobeu la condició sobre els paràmetres positius a i b , per tal que la funció f_X de la gràfica del **Problema 5a** representi la funció de densitat d'una variable aleatòria X . (5 pt.)

- (b) Si X, Y són variables aleatòries amb $Var(X) = Var(Y) = 4$ i tals que la variable aleatòria suma $Z = X + Y$ té per densitat

$$f_Z(z) = \begin{cases} kz & \text{si } 0 \leq z \leq 6; \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

- Calculeu $E(Z)$, $P(Z \geq 1)$ i $P(Z \leq 1 | Z \geq 1/2)$. (10 pt.)

- Calculeu $Var(Z)$ i raoneu que X i Y no són independents. (5 pt.)

- (c) Considereu la variable aleatòria $W = \sum_{n=1}^{100} Z_n$, on cada variable Z_n per $1 \leq n \leq 100$, té la distribució donada per la variable Z de l'apartat anterior. Si les suposem mutuament independents, calculeu

$$P(W \leq 390). \quad (15 \text{ pt.})$$

- * 8. Un sistema lineal invariant en el temps té per resposta impulsiva $h(t) = (e^{-t} - e^{-3t})\theta(t-0)$

- (a) Calculeu la funció de transferència del sistema. (8 pt.)

- (b) Obteniu la resposta $y(t)$, en passar pel sistema la entrada

$$u(t) = e^{-t}\theta(t-0). \quad (10 \text{ pt.})$$

- (c) Un sistema discret ve donat per la següent equació en diferències

$$y_n - y_{n-1} + \frac{1}{4}y_{n-2} = x_n.$$

- i. Trobeu la funció de transferència del sistema. Pot el sistema tenir respostes en estat estacionari? (7 pt.)

- ii. Resoleu l'equació en diferències per l'entrada $x_n = 2^{-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ i condicions inicials $y_{-1} = y_{-2} = 0$. (10 pt.)

RECULL DE PROBLEMES DEL 2^{on} QUADRIMESTRE A.M.A.E. Curs 95/96.

① La diferència de potencial $y(t)$ a la sortida d'un circuit vé donada en termes de la diferència de potencial $u(t)$ a l'entrada per l'equació diferencial $y'(t) + 2y(t) = u(t)$.

(a) Trobeu la funció de transferència del sistema i deduiu que la resposta impulsiva és $h(t) = e^{-2t}\theta(t)$ (on $\theta(t)$ representa la funció de Heaviside). (10 p.)

(b) Calculeu la resposta $y(t)$ quan l'entrada és $u(t) = 2e^{-t}\theta(t)$ per dues vies:

i. Per convolució directa.

ii. Utilitzant les propietats de la transformada de Fourier respecte de la convolució. (15 p.)

② Siguin X , Y variabls aleatòries amb distribució normal, independents tals que el procés

$$Z(t) = X \cos t + 3Y \sin t$$

és estacionari amb $E(Z(t)) = 0$ i densitat espectral

$$G_Z(\omega) = 3\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

(a) Demostreu que $X = N(0, \sqrt{3})$ i $Y = N(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. (5 p.)

(b) Calculeu $P(Z(\pi) > Z(\pi/2))$. (5 p.)

(c) Calculeu la potència promig total de $Z(t)$. (5 p.)

(d) Si $Z(t)$ es passa per un filtre amb funció de transferència $H(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$, calculeu la potència promig total del procés de sortida. (5 p.)

(e) Calculeu l'esperança i la funció d'autocorrelació del procés de sortida de l'apartat anterior. (5 p.)

③ Siguin X la variable aleatòria absolutament contínua que ens dona l'error en mm que cometem en mesurar una barra de metall amb un determinat aparell. La funció característica de X és:

$$\phi_X(t) = \frac{1}{1 - it}$$

(a) Trobeu l'esperança i la variància de la variable aleatòria X . (5 p.)

(b) Demostreu que la funció de densitat de la variable aleatòria X és $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ (5 p.)

(c) Calculeu $P(X \leq 3)$. (5 p.)

(d) Siguin 100 barres mesurades de forma independent. Trobeu quina és la probabilitat de que l'error total comés en mesurar les 100 peces no superi els 120 mm. (10 p.)

④ (a) Resoleu l'equació en diferències

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = x_n$$

amb entrada $x_n = 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, i condicions inicials $y_{-1} = 0$, $y_{-2} = 0$. (20 p.)

(b) Què podeu dir de $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$? Quina relació té això amb els pols de la funció de transferència discreta? (5 p.)

⑤ La llargària en mil·límetres d'un cert tipus de cargols ve descrita per una variable aleatòria normal amb esperança 60 mm i desviació típica de 3 mm.

(a) Quin tant per cent de cargols són més curts de 57 mm? (5 p.)

(b) D'un grup de 40 cargols, quina és la probabilitat de que n'hi hagi algun més curt de 57 mm? (10 p.)

(c) D'entre els cargols que se sap superen els 62 mm, quin tant per cent supera els 65 mm? (10 p.)

6) Sigui X_t un procés Gaussià estacionari amb $E(X_t) = 0$ i funció d'autocorrelació $R_X(\tau) = 2\delta(\tau)$.

- Trobeu la densitat espectral de $X(t)$.
- Suposeu que el procés es passa per un filtre amb resposta impulsiva $h(t) = \theta(t)e^{-t}$. Demostreu que la densitat espectral del procés de sortida Y_t val $G_Y(\omega) = 2/(1 + \omega^2)$.
- Calculeu l'esperança i autocorrelació del procés de sortida Y_t .

7) Sigui $Z(t) = \frac{1}{T}X(t - T)$, on $X(t)$ és un procés estacionari i $T > 0$.

- Calculeu l'esperança del procés $Z(t)$ en termes de l'esperança del procés $X(t)$. (5 p.)
- Trobeu la relació entre la densitat espectral de $Z(t)$ i de $X(t)$. (10 p.)
- Sigui $X(t) = X \cos(t + Y)$ amb X i Y variables aleatòries independents amb distribució uniforme a l'interval $[-\pi, \pi]$. Comproveu que $X(t)$ és estacionari i calculeu la potència promig total de $Z(t)$. (10 p.)

8) Una barreja aleatòria de gasos està formada per oxigen, nitrogen i hidrogen. Sigui X i Y les variables aleatòries que ens donen la proporció (en tant per 1) d'oxigen i nitrogen respectivament d'aquesta barreja. La densitat conjunta de (X, Y) és:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, 0 \leq x+y \leq 1, \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

- Dibuixeu el domini pel qual la funció densitat és diferent de zero. (5 p.)
- Demostreu que $k = \frac{e}{e-2}$. (10 p.)

(c) Calculeu la probabilitat de que en la barreja hi hagi més de la meitat d'hidrogen. (5 p.)

(d) Calculeu la probabilitat de que en la barreja hi hagi entre un 10 % i un 20 % de nitrogen. (5 p.)

9) (a) Sigui el senyal continu

$$s(t) = \begin{cases} 3^{-t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Discretitzem el senyal $s(t)$ avaluant-lo en els enters. Representeu gràficament el senyal $s(t)$ i el corresponent senyal discretitzat. (5 p.)

(b) Trobeu la resposta al senyal discret $x(k) = 3^{-k}$, $k \geq 0$ obtinguda en passar-la per un sistema amb resposta impulsiva

$$h(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

(10 p.)

(c) Si la resposta impulsiva d'un sistema discret és $h(k) = \frac{3k+2}{3^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, trobeu l'equació en diferències que representa aquest sistema. (10 p.)

- 10) S'escull a l'atzar un punt amb coordenades polars (r, φ) , situat dins del disc de centre l'origen i radi 1, d'acord amb la funció de densitat conjunta:

$$f_{(R, \Phi)}(r, \varphi) := \begin{cases} r/\pi, & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \text{ i } 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

- a) (6 punts) Proveu que la probabilitat de triar un punt que estigui dins del primer quadrant (això és, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$) val $1/4$.
b) (6 punts) Trobeu les densitats marginals de R i Φ . ¿Són R i Φ independents?
c) (6 punts) Trobeu les esperances $E(R)$ i $E(\Phi)$.
d) (7 punts) Si es trien dos punts, successivament i de manera independent, trobeu la probabilitat que tots dos estiguin al mateix quadrant del pla.

- 11) a) (6 punts) Si un sistema lineal i invariant en el temps té resposta impulsiva $h(t) = u(t-0)e^{-t} \cos t$ (on u és la funció de Heaviside), proveu que la seva funció de transferència val $H(\omega) = \frac{1+i\omega}{2+2i\omega-\omega^2}$.
b) (7 punts) Si $Z_t = aX \cos t + Y \sin t$, on X i Y són dues variables normals $N(0, 1)$ i amb $E(X \cdot Y) = b$, trobeu el (o els) valor(s) que han de tenir les constants reals a i b per tal que el procés Z_t sigui estacionari.
c) (6 punts) Trobeu l'espectre $G_V(\omega)$ del procés $V_t = -X \cos t + Y \sin t$, on X i Y són dues variables normals $N(0, 1)$ i independents.
d) (6 punts) Trobeu l'espectre de sortida del procés que s'obté en passar V_t per el filtre de l'apartat a). Calculeu també l'esperança d'aquest procés de sortida.

- 12) a) (15 punts) Sigui $\Phi_X(t) = k e^{-a|t|}$, on $a, k > 0$ i són reals. Trobeu el valor de k (en funció de a) per al qual $\Phi_X(t)$ és la funció característica d'una certa variable aleatòria X . Trobeu també la funció de densitat de X .
b) (7 punts) Un procés estocàstic estacionari Z_t té esperança $E(Z_t) = 2$ i densitat espectral $G_Z(\omega) = (1/2)(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))$. Calculeu la seva autocorrelació $R_Z(\tau)$.
c) (3 punts) Calculeu la variància del procés Z_t de l'apartat precedent.

- 13) Siguin X, Y variables aleatòries contínues amb funció de densitat conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

i sigui Z una variable aleatòria normal amb esperança zero i variància $\sigma^2 = 17/324$, independent de X i Y .

- (a) Calculeu $E(X \cdot Y)$, $E((X \cdot Y)^2)$, i també $E(X)$ i $E(Y)$, sense calcular les marginals. Són independents X i Y ?

- (b) Calculeu $P(Z > -0.1)$.

- c) Sigui el procés $W(t) = (X \cdot Y - 4/9) \sin t + Z \cdot \cos t$.

Calculeu la seva esperança i la seva autocorrelació, i diguen si és estacionari.